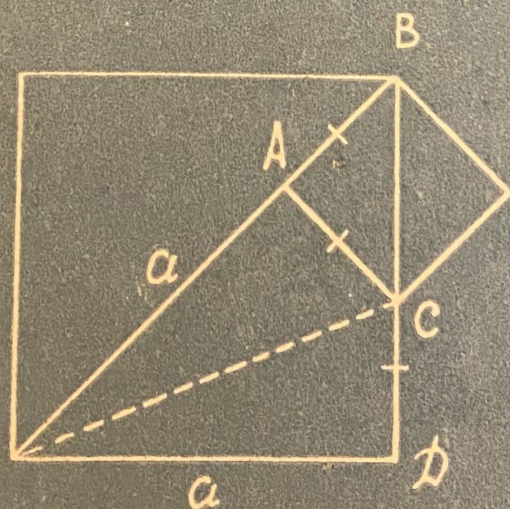
З. И. ХӘЛИЛОВ

ИНСАНЛАР ИНДИКИ РИЯЗИЙЯТА НЕЧӘ КӘЛИБ ЧАТМЫШЛАР



БАКЫ · УШАГКӘНҸНӘШР · 1955

З. И. ХӘЛИЛОВ
Физика-риязийјат елмләри доктору, професор

ИНСАНЛАР ИНДИКИ РИЈАЗИЈЈАТА НЕЧӘ КӘЛИБ ЧАТМЫШЛАР

Азәрбајчан
Ушаг вә Кәнчләр Әдәбијјаты Нәшријјаты
Бакы — 1955

Бу китабчанын язылмасында әсас мәгсәд кәнч охучуларымызы риязийятын мадди әсасларынын инкишаф йоллары илә вә онун айры-айры һиссәләринин мүндәрәчәсилә, риязи фәнләрин техника, тәбиәт элмләри вә инсанын практики фәалиййәти үчүн әһәмиййәти илә таныш этмәкдән, инсанларын индики риязийята нечә кәлиб чатдыгларыны онлара көстәрмәкдән ибарәтдир.

Китабчада мүасир риязийят һиссәләринин һамысы һаггында данышылмыр. Чүнки онларын бә'зиләри хүсуси һазырлыг тәләб эдир.

Китабчада риязийятын бир нечә һиссәләринин әсас проблемләри, онларын һәлли методлары вә һәр һиссәнин мүасир вәзиййәти һаггында мә'лумат верилир. Бу мә'лумат еддииллик тәһсил һәчминдә һазырлығы олан охучуларын мәнимсәйә биләчәйи дәрәчәдә верилмишдир.

„Чанлы мүшаһидәдән мүчәррәд тәфәккүрә вә ондан практикая. *Һәгигәти* дәрк этмәйин, об'ектив реаллығы дәрк этмәйин диалектик йолу беләдир“,
(В. И. Ленин, Фәлсәфә дәфтәрләри, 1947, сәһ. 146—147)

Бүтүн башга элмләр кими, риязийят да инсанларын әмәли еһтийачларындан: торпаг саһәләринин вә габларын тутумуну өлчмәкдән, вахтын һесабланмасындан вә механикадан әмәлә кәлмишдир.

Ф. ЭНКЕЛС

I. ИЛК РИЯЗИ АНЛАЙЫШЛАР

Ер үзәриндә инсанлар бир чох йүз мин илләр бундан әввәл чанлыларын узун мүддәт инкишафы нәтичәсиндә төрәнмишләр. Индики инсанлар да һәмин гәдим дөврдә яшаян инсанларын енә дә узун мүддәт инкишафы нәтичәсиндә әмәлә кәлмишләр.

Ибтидаи инсанлар вәһши идиләр. Онлар һейван кими сүрү илә яшайырдылар.

Инсанлар кәзәрәк ем ахтарырдылар. Онлар дашдан, ағачдан вә сүмүкдән мүхтәлиф кобуд силаһлар гайырыб истифадә эдир, һейванлары овламаг үчүн бир ердән дикәр ерә көчүрдүләр.

Ибтидаи инсанлар нә һейвандарлыг, нә әкинчилик вә нә дә әлдә эдилән әрзагдан ем һазырламағы билмирдиләр.

Бу илк дөврләрдә яшаян инсанларын мүәййән яшайыш ери олмамышдыр. Чүнки онлар һәлә тикинти ишини билмирдиләр. Одур ки, онлар һейван кими мешәләрдә, ағачларда, мағараларда яшайырдылар.

Белә яшаян инсанларын һәяты һәмишә горху алтында иди. Одур ки, яшамаг уғрунда мүбаризә инсанлары групплашмаға, бирликдә ем вә мүвәггәти дүшәркә ери ахтармаға мәчбур эдирди. Ибтидаи инсанын һәяты белә иди.

Инсанларын һәяты бир сәвиййәдә галмырды. Инсан чәмиййәти чох яваш-яваш инкишаф эдирди. Истеһсал аләтләри кетдикчә тәкмилләширди. Мүәййән дөврдә дашы яхшы йонуб һамарламаг йолу илә бычаглар, ох учлары, балталар гайырмаға башладылар. Сонра каманла ох атмағы, сапанла даш тулламағы, узагдан ов этмәйи өйрәндиләр. Бундан башга инсанлар килдән габ гайырмағы, һейванларын дәрисиндән истифадә этмәйи дә бачардылар. Онлар вулканлардан вә я янан мешәләрдән од әлдә этдиләр. Сонралары исә өз-

ләри дә од төрәтмәйи өйрәндиләр. Ики ағач һиссәсини бир-биринә сүртәрәк вә я ики даш парчасыны бир-биринә вураraг од һасил әдә билдиләр. Әмәк аләтләри дәйишдикчә инсанлар да дәйишир, онларын һәјат үчүн лазым олан васитәни тапмаг йоллары да дәйиширди. Бу дөврләрдә артыг инсанлар һейванлары рам этмәйи, балыг овламағы өйрәнирләр. Онлар, ибтидаи һейвандарлыға башлайырлар. Көчәри һәјат кечирән инсанлар артыг мүәййән торпагларда яшамаға башлайырлар.

Бир чох мин илләр кечдикдән сонра инсанлар ени, даһа йүксәк мәишәтә гәдәм гойдулар. Онлар артыг тәсадүфи емлә, вәһши от вә көкләрлә, һәмишә мүвәффәгиййәтлә гуртармаян овла кифайәтләнә билмирдиләр. Инсанларын ем, палтар әлдә этмәйә, мәнзил гурмаға, аләт һазырламаға олан тәләбаты артыр. Бөйүк һейван сүрүләринин бәсләнмәси инсанлара сүд, әт, дәри вә сүмүк верирди. Инсан садә ер әкмәкдән даһа инкишаф этмиш әкинчилийә кечир. Хыш вә котан ярадылыр вә ер шумунда һейванларын әмәйиндән истифадә эдилир.

Инсанын һәяты вә мәдәниййәти белә яранараг инкишаф эдир.

Мүәййән дөврләрдә инсан чисимләри *саймаға* башлайыр, онда ов этдийи һейванларын, гушларын вә гайырдығы силаһларын сайыны билмәк эһтийачы доғур. Инсан артыг инкишаф этмишдир, онун үчүн чисимләри саймаг вә бир груп чисимләри башга груп чисимләрлә мүгайисә этмәк лазым кәлир.

Илк дөврләрдә инсанларда *чох* вә *аз* анлайышы яраныр. Сонралар исә *нә гәдәр чох, нә гәдәр аз* анлайышы әмәлә кәлир.

Даһа сонралар сай просесиндә инсан конкрет чисимләрдән узаглашыр, онда *әдәд* анлайышы әмәлә кәлир: ики гушда, ики кечидә, ики ағачда олан үмумилик онларын *ики дәнә* олмасыдыр. Бу үмуми олан *ики*, әдәддир. Беләликлә әдәд анлайышы яраныр. Бу нөв илә үч, дөрд вә и. а. әдәдләр анлайышы яраныр.

Сай просесиндә тәбии олараг илк дәфә *топлама* әмәли яранмышдыр. Ов эдилән ики гуш үзәринә икинчи дәфә ов эдилән үч гуш әлавә эдилибдир. Бу заман ов эдилмиш гушларын һамысы сайылса нечә дәнә олар. Әлбәтдә, илк дөврләрдә гушларын һамысыны бир-биринә гарышдырыб тәзәдән сайырдылар. Сонралар исә узун мүддәт тәчрүбәнин вә бөйүк инкишафын нәтичәсиндә *ики* әдәди илә *үч* әдәдинин топланмасы нәтичәсиндә алынан *беш* әдәди гушларын сайыны көстәрир. Беләликлә илк риязийят яраныр. Инсанлар *әдәд анлайышына вә топлама әмәлинә узун мүддәтли инкишафын нәтичәсиндә кәлиб чыхырлар.*

Риязийят илк доғулушундан башлаяраг үмумилик хассәсини дашыйыр: тәбиәтдә олан чисимләр әдәдләрлә сайылыр, әдәдләрин топланмасы нәтичәсиндә алынан ени әдәдләр исә гарышдырылан вә яхуд бирликдә көтүрүлән чисимләрин сайыны верир.

Инсанлар узун мүддәтли тәчрүбә вә инкишаф нәтичәсиндә *топлама әмәлинин хассәләрини* өйрәнирләр. Истәр әввәл ики гушу, сонра исә үч гушу көтүр, яхуд әввәл үч гушу, сонра исә ики гушу көтүр, һәр ики һалда гушларын чәми бешдир; үч груп чисим варса, онлар һансы нөвбәдә көтүрүлүрсә көтүрүлсүн чәми эйнидир. Беләликлә чәмдә ердәйишмә вә групплашдырма гануну кәшф эдилир:

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} = \mathrm{III} + \mathrm{II},$$

$$(\mathrm{II} + \mathrm{III}) + \mathrm{I} = \mathrm{II} + (\mathrm{III} + \mathrm{I}).$$

Бурада ишләтдийимиз *ишарәләр* вә *рәгәмләрин* чох сонралар ярадылмасына бахмаяраг биз онлардан анчаг фикримизи изаһ этмәк үчүн истифадә этдик.

Тәчрүбә вә инкишаф нәтичәсиндә инсан группары вә гәбиләләри арасында мүбадилә башланыр. Йә'ни бир гәбиләдә артыг олан әрзаг вә һәят васаити башга гәбиләдә артыг олан башга әрзаг вә һәят васаитилә мүбадилә эдилир. Бу мүбадилә нәтичәсиндә мүәййән дөврдә сайма просесинә вә топлама әмәлинә бөйүк эһтияч төрәнир.

Әдәдләри көстәрмәк үчүн рәгәмләр ярадылмышдыр. Рәгәмләрин ярадылмасы исә сай системи илә бағлыдыр.

Инкишафын мүәййән дөврүндә инсанлар сайы асанлашдырмаг үчүн *гыса сайма* үсулларыны кәшф этмишләр. Онлар чүт-чүт, он ики-он ики, ийирми-ийирми, алтмыш-алтмыш, вә и. а. саймағы өйрәнмишләр.

Һазырда инсанлар *онлуг* сай системиндән истифадә эдирләр.

Онлуг сай системиндә он рәгәм лазым олур:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 0. \qquad (*)$$

Бу он рәгәмин васитәсилә һәр бир әдәди көстәрмәк мүмкүндүр. Бу һагда охучу мүәййән мә'лумата маликдир.

Билмәк лазымдыр ки, юхарыда көстәрилән рәгәмләр (нумерасия) бөйүк инкишаф нәтичәсиндә алынмышдыр.

(*) рәгәмләр әдәбиййатда әрәб рәгәмләри адланыр. Әрәбләр рәгәмләри биринчи дәфә һиндлиләрдән өйрәнмишләр. Әрәбләрин ишләтдийи:

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

рәгәмләри авропалылар биринчи дәфә VIII әсрдә өйрәнмишләр.

Сонралар бу рәгәмләр мүхтәлиф дөврләрдә Авропада белә ишләдилмишдир:

Әрәбәлрин рәгәмләри:

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Авропада X әсрдә:

1 Z { § Ϭ 4 V 7 9 0

Авропада XIV әсрдә:

1 Z 3 X 7 6 7 8 9 0

Мүасир дөврдә:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Ромада исә:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X

кими ишләнилирди. Гәдимләрдә Бабилистанда ишләнилән рәгәмләр белә иди:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

— 11-и — 19-у

көстәрир.

Сонралар инсанлар топламанын тәрси олан *чыхма* әмәлини, мүхтәсәр топлама әмәли олан *вурма* әмәлини, вурманын тәрси олан *бөлмә* әмәлини ишләдирләр.

Инсанлар сайма просесилә бирликдә икинчи бир просеси дә ишләтмәйә башлайырлар. Бу да мәсафәләри мүгайисә этмәкдән, *өлчмәкдән* ибарәтдир.

Ерин бир нөгтәсилә дикәр нөгтәси арасындакы мәсафә нә гәдәрдир? Илк дөврләрдә йәгин ки, бу суала белә чаваб

верилир: о нөгтәләр арасындакы мәсафә ики күнлүк пияда йолдур, ярым күнлүк ат йолудур. Бурада бир мәсафә дикәр мәсафә илә мүгайисә олунур. Ики дәринин һансындан даһа чох папаг олар? Бурада дәриләрин бөйүк вә кичик олмасы нәзәрә алынараг мүгайисә эдилмәлидир.

Өлчү просеси дә әдәд анлайышыны ярадыр.

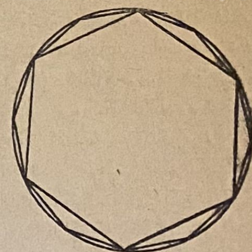
Һәр ики просесдә илк дөврләрдә ики, үч вә чох, сонралар ики, үч, дөрд, беш вә чох, даһа сонралар исә он вә и. а. инкишаф белә гайда илә давам эдир.

Сай просеси анчаг там әдәдләри верир. Өлчү просеси дәгигләшдикчә там әдәдләр артыг кифайәт этмир. Одур ки, өлчү просеси бизи *кәср* әдәди анлайышына кәтириб чыхарыр. Бу дәридән үч папаг вә бир дә папағын ярысы чыхыр.

Даһа сонралар инсанын мәдәниййәти артыр, о гайыг һазырлайыр, бүрүнчдән силаһлар гайырыр, эвләр тикир, чайлар үзәрилә көрпүләр салыр, араба дүзәлдир. Бунлар һамысы һәм сай вә һәм дә өлчү просесинин дәгигләшмәсини тәләб эдир. Әввәлләр ярым, дөрддә бир кәср анлайышлары кифайәт эдирдисә, инди артыг даһа мүрәккәб кәсрләрин ишләнмәсинә эһтияч ояныр.

Сонралар бөйүк кәмиләрин гурулмасы, бөйүк биналарын тикилмәси, узун көрпүләрин салынмасы, кәскин силаһларын һазырланмасы өлчү просесини даһа артыг инкишаф этдирир. Беләликлә дә мүрәккәб кәсрләр алыныр.

Мәсәлән, әввәлләри даирә чеврәсинин узунлуғу, онун радиусунун 6 мислинә бәрабәр олмасы гәбул эдилирди. Сонралар бу кифайәт этмир. Чеврәләрин даһа дәгиг өлчүлмәси лазым кәлир. Одур ки, чеврәни 12 ерә бөләрәк онун узунлуғуну вә саһәсини даһа дәгиг өлчүрләр (шәкил 1). Лакин бу да кифайәт этмир; просес давам этдирилир. Нәһайәт бу нисбәтин мүәййән эдилмиш даһа дәгиг гиймәти 6,28 әдәди олдуғу әлдә эдилир.



Шәкил 1

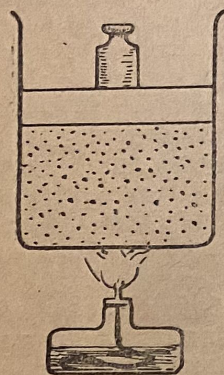
Заман кечдикчә инсанлар кечә вахты сәһраларда вә яхуд ачыг дәнизләрдә һәрәкәт этдикдә вәзиййәти тә'йин этмәк үчүн улдузларын вәзиййәтиндән истифадә эдирләр. Бунунла әлагәдар олараг чох узаг мәсафәләри өлчмәк лазым кәлирди.

Буна көрә дә дәгиг өлчмәк просесинә бөйүк эһтияч доғулурду.

Өлчү просесинин дәгиглийинин артырылмасы эһтиячы артдыгча өлчү васитәләри вә риязи методлар да инкишаф этдирилир. Бунунла әлагәдар олараг *һәндәсә элми* яраныр. Илк һәндәсәнин әсаслары илә охучу орта мәктәбдә таныш олмушдур.

Даһа сонралар инсанлар тәбиәт һадисәләрини тәҹрүби истифадә мәгсәдилә өјрәнмәјә башлајыр; мүхтәлиф һадисәләр арасындакы әлагәләри тапмаг истәјир. Бунунла әлагәдар оларағ бир чох риязи мәсәләләр ортаја чыхыр. Бу мәсәләләрин һәлли үчүн бир чох бөјүк ишләр көрүлүр.

Һадисәнин бириси јарандыгда мүәјјән дикәр һадисәнин әмәлә кәлмәси тә'мин эдилир. Бу һалда дејирләр ки, бу ики һадисә арасында *асылылыг* вардыр. Бу асылылыглары тә'јин этмәк үчүн тәҹрүби вә нәзәри методлар јаранып.



Шәкил 2

Мәсәлән, габдакы газы гыздырдыгда көрүрүк ки, о газын тәзјиги артыр (шәкил 2). Демәк газын температурасы илә тәзјиги арасында мүәјјән асылылыг вардыр. Бу кими асылылыглары өјрәнмәк үчүн мүәјјән риязи методлар јарадылыр.

Бурада ики нөв мәсәлә гојулур:

1) һадисә бүтөв мә'лум икән онун һиссәсинин ганунијјәтини тә'јин этмәк;

2) һадисәнин кичик һиссәсиндәки ганунијјәт мә'лум икән ону бүтөв тә'јин этмәк.

Бу мәсәләләр XVII әсрдән башлајараг риязијјатын гаршысына гојулур. Һәмин мәсәләләрин һәлли һаггында китабчанын 5-ҹи параграфында мүәјјән мә'лумат вериләҹәкдир.

Тәдгиг олунан һадисәләр мүрәккәбләшдикҹә вә бунунла әлагәдар олан риязи проблемләрин һәҹми бөјүдүкҹә *символларын*—гыса ишарәләрин ишләнилмәси мәсәләси ортаја чыхыр. Мүасир риязијјатда *символлардан* чох кениш истифадә эдилир.

Мүасир элм вә техника риязијјатын гаршысында бир сыра јени мәсәләләр гојмушдур. Бөјүк сүр'әтли нәглијјат васитәләринин, тәјјарәләрин, паравозларын, кәмиләрин јарадылмасы, јени энержи мәнбәләри, мәсәлән, атом энержисинин истифадә эдилмәси, јүксәк вә тәҹһиз олунмуш биналарын тикилмәси, тәбиәт һадисәләринин даһа дәриндән өјрәнилмәси, инсанларын эһтијаҹларынын даһа чох тә'мин эдилмәси мәсәләләри бир чох риязи мәсәләләрин һәллини тәләб этмәкдәдир. Бунун нә дәрәҹәдә лазым олдуғуну јахшы дүшүнмәк үчүн һавадан чох ағыр олан тәјјарәнин учушуну мисал кәтирмәк олар. 30—40 сәрнишин тутан вә бөјүк јүк көтүрән тәјјарәләрин бөјүк сүр'әтлә хәтәрсиз һәрәкәти үчүн онун ганадлары, гујруғу, пропеллери, матору вә бир чох ҹиһазлары дәгиг һесабланмалыдыр. Бу һесабламалар бир чох мүрәккәб риязи мәсәләләрин һәллини тәләб эдир. Мүасир риязијјатын

әсас мәсәләләри вә онун һәлл эдилмәсинин методлары һаггында исә кәләҹәк параграфларда данышылаҹагдыр.

2. ӘДӘД АНЛАЈЫШЫНЫН ИНКИШАФЫ

Кечән параграфда сај просесинин тәбии әдәдләри, јә'ни мүсбәт там әдәдләри, өлчү просесинин исә кәср әдәдләри јаратдығыны көрдүк.

Тәкҹә сај вә өлчү просесләри дејил, риязијјатдакы әмәлләр дә јени әдәд анлајышлары јарадыр, мәсәлән, *һәр бир тәрс әмәл јени тәбиәтли әдәдләрин мејдана кәлмәсинә сәбәб олур.*

Чыхма әмәли бизи сыфыра вә мәнфи әдәдләрә кәтириб чыхарыр. Чүнки тәбии әдәдләр даирәсиндә

$$2-2$$
$$2-3$$

кими чыхмалар мүмкүн дејил. Бу фәргләр ја мүстәсна олараг гәбул олунмалы, јахуд да онлары ифадә эдә билән јени әдәдләр гәбул эдилмәлидир. Әлбәт ки, бурада икинҹи јол илә кедилмәлидир. Чүнки бу јол инкишафа доғру кедән јолдур. Бу мәгсәдлә дә сыфыра бир әдәд кими бахмышлар вә һәм дә риязијјата мәнфи әдәдләр дахил этмишләр.

Сыфыр, бәрабәр әдәдләрин фәргини, мәнфи әдәдләр исә чыхыланын азаландан бөјүк олдуғу һаллардакы фәрги ифадә эдир.

Ади әдәдләри мәнфи әдәдләрдән фәргләндирмәк үчүн онлара мүсбәт әдәдләр ады верилмишдир.

Беләликлә вахтилә мә'лум олан тәбии әдәдләр чохлуғу:

$$1,2,3,... \qquad (1)$$

кенишләндирилир вә

$$...-2,-1,0,+1,+2,... \qquad \textbf{(2)}$$

әдәдләр чохлуғу јаранып. Бу алынан әдәдләр чохлуғу там әдәдләр чохлуғу адланыр.

Кенишләндирилмиш (2) чохлуғунун әһәмијјәти орасындадыр ки, онлар үчүн чыхма әмәли һәмишә мүмкүндүр. Һалбуки, чыхма әмәли (1) чохлуғун дахилиндә дедијимиз кими, һәмишә мүмкүн дејилдир.

Сонралар мәнфи әдәдләр бөјүк мүвәффәгијјәтлә физикада вә техникада ишләнилир. Мәсәлән, мәнфи (сыфырдан ашағы) вә мүсбәт (сыфырдан јухары) температуралар, мәнфи (кечмиш) вә мүсбәт (кәләҹәк) заманлар, мәнфи (башланғыч

нөгтәсиндән кери) вә мүсбәт (башланғыч нөгтәсиндән ирәли) мәсафәләр.

Инди биз вурма әмәлинин тәрси олан бөлмә әмәлини көтүрәк. Тәбии әдәдләр даирәсиндә бу әмәлдән һәмишә истифадә этмәк мүмкүн дейилдир. Мәсәлән,

$$2:3$$

Бурада да я бу кими бөлмә мүстәсна эдилмәлидир, яхуд да ени әдәдләр—кәсрләр риязийята дахил эдилмәлидир. Элм икинчи йолла кетмишдир.

Дедийимиз инкишафын нәтичәсиндә (2) чохлуғу даһа кениш олан

$$\pm\frac{m}{n} \tag{3}$$

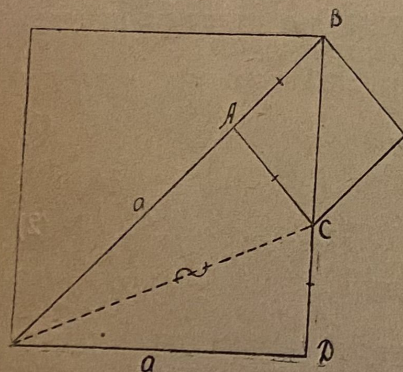
$$m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad n=\pm 1, \pm 2, \ldots$$

чохлуғуна давам этдирилир. Инди артыг әдәдләр чохлуғу сыфырдан, мәнфи вә мүсбәт, там вә кәср әдәдләрдән ибарәтдир.

Ону да гейд этмәк лазымдыр ки, кәср һәм өлчү просесиндән, һәм дә бөлмә әмәлинин нәтичәсиндә алыныр.

Мүәййән дөврдә алимләр белә бир һадисәйә дә тәсадүф этмишдиләр; бә'зән бир чисми дикәр чисим илә мүгайисә этдикдә (өлчдүкдә) көрүрдүләр ки, нәтичәдә нә там вә нә дә кәср әдәд алыныр.

Мисал үчүн истәнилән квадратын диагоналы илә тәрәфини көтүрәк. Квадратын тәрәфини онун диагоналы үзәринә гойсаг, галан AB парчасы $AC=CD$ парчасына бәрабәр олдуғундан енә дә ени квадратын тәрәфи олан AB парчасы илә онун диагоналы олан BC—нин мүгайисәсинә кәлирик. (шәкил 3). Чүнки OC хәттинин көмәйи илә ики бәрабәр OAC вә ODC дүзбучаглы үчбучаглар әлдә эдилир. Бурада өлчү просесинин сонсуз давам этдийини көрүрүк. Демәк квадратын диагоналы илә тәрәфини мүгайисә этдикдә нә там әдәд вә нә дә кәср әдәд алыныр.



Шәкил 3

Сыфыр, мүсбәт вә мәнфи кәср вә там олмаян әдәдләрә риязийятда *иррасионал* әдәдләр дейилир.

Икинчи бир мисал көтүрәк. Исбат эдәк ки, $\sqrt{2}$ иррасионал әдәддир. Буну исбат этмәк үчүн онун тәрсини көтүрәк: фәрз эдәк ки, $\sqrt{2}$ кәсрдир:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \tag{1}$$

бурада p вә q ортаг вуруғу олмаян там әдәдләрдир, йә'ни $\frac{p}{p}$ кәсри ихтисар олуна билмир. (1) бәрабәрлийини квадрата йүксәлтсәк,

$$2=\frac{p^2}{q^2}$$

алынар, йә'ни

$$p^2=2q^2 \tag{2}$$

Бурадан анлашылыр ки, p чүт әдәддир*, йә'ни

$$p=2\,p'$$

кими языла биләр. p—нин бу гиймәтини (2)—дә еринә гойсаг,

$$q^2=2p'^2$$

алынар. Бурадан да анлашылыр ки, q чүт әдәддир. Демәк p вә q әдәдләринин ортаг вуруғу вардыр, бу вуруг 2—дир. Бу исә фәрзиййәмизин доғру олмадығыны исбат эдир. Бурадан исә $\sqrt{2}$ әдәдинин иррасионал әдәд олдуғу алыныр.

Иррасионал олмаян әдәдләрә *расионал* әдәдләр дейилир, йә'ни сыфыр, мүсбәт вә мәнфи, там вә я кәср әдәдләрә расионал әдәдләр дейилир.

Исбат олунмушдур ки, иррасионал әдәдләр расионал әдәдләрдән олдугча чохдур.

Расионал вә иррасионал әдәдләрә бирликдә *һәгиги* әдәдләр дейилир.

Гүввәтә йүксәлтмәнин тәрси олан көкалма әмәли дә риязийята иррасионал әдәдләри дахил этмишдир:

$$\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt[3]{7}, \ldots$$

Бундан башга риязийята көкалма әмәли *хәяли* әдәдләри дә дахил этмишләр:

$$\sqrt{-2}, \ \sqrt{-4},$$

Бу әдәдләрә *хәяли* адыны кечмишдә вермишләр. Чүнки һеч бир һәгиги әдәдин квадраты мәнфи ола билмәз.

---

* Чүнки тәк әдәдин квадраты тәкдир: $(2к+1)^2=4\,к\,(к+1)+1$.

Сонралар мә'лум олмушдур ки, хәяли әдәдләрин риязийятда чох бөйүк әһәмиййәти вардыр. Одур ки, хәяли әдәдләр мүасир риязийятда кениш сурәтдә тәтбиг олунур.

Әдәд анлайышы даима инкишаф этмәкдәдир. Һазырда риязийят элминдә кениш истифадә олунан ени әдәдләри охуҹу бу китабчадан илк мә'луматы алдыгдан сонра хүсуси әдәбийят васитәсилә өйрәнә биләр.

3. ӘДӘДЛӘР НӘЗӘРИЙЙӘСИ

Әдәдләрин хассәләринин вә дашыдығы дахили ганунларын өйрәнилмәси инди дә давам эдир. Әдәдләрин өйрәнилмәсилә әлагәдар олараг бир чох риязи фәнләр әмәлә кәлмишдир. Мәсәлән, там әдәдләри өйрәнән айрыча риязи фәнн вардыр. Бу фәнн *әдәдләр нәзәриййәси* адланыр. Бу фәннин әсас мәсәләләриндән бири дә там әдәдләрин тәркибини өйрәнмәкдир. Бу саһәдә чох мәшһур олан проблемләрдән бириси һаггында данышаг.

Петербург элмләр академиясынын үзвү олан алим Голдбах йохламалар нәтиҹәсиндә белә бир гәрара кәлмишди ки, *һәр бир там әдәди үч әсли әдәдин ҹәми кими көстәрмәк олар.** Бу һөкмү Голдбах өзү исбат эдә билмәмишди. 1742-ҹи илдә о, мәшһур рус алими Эйлерә яздығы мәктубунда гейд этмишди ки, *бешдән бөйүк һәр бир там әдәди үч әсли әдәдин ҹәми кими көстәрмәк олар.*

Эйлер дә бу теореманы исбат эдә билмәмишди.

Нә Голдбахын вә Эйлерин дөврүндә яшаян алимләр вә нә дә XIX әсрин риязийятчылары бу мәсәләнин һәлли үчүн һеч бир шей әлдә эдә билмәмишләр.

Мәшһур алман алими Кантор бу һөкмү 2-дән 1000-ә гәдәр олан әдәдләрдә йохламышдыр. Обри исә бу иши 2. 000-ә гәдәр давам этдирмишдир. Бу әдәдләр даирәсиндә Голдбах һөкмүнүн доғру олдуғу айдын олмушдур.

1911-ҹи илдә Меле исбат этмишдир ки, 14 дәнә әдәд мүстәсна олмаг шәртилә 9. 000. 000-а гәдәр олан әдәдләр үчүн Голдбахын һөкмү доғрудур. Бундан артыг һеч бир аддым атан олмамышды.

1912-ҹи илдә мәшһур риязийятчы Ландау риязийят конгресиндә өз фикрини сөйләйәрәк демишдир ки, мүасир риязийятын күчү илә бу проблем һәлл олуна билмәз.

1923-ҹү илдә инкилис риязийятчыларындан Һарди вә Литлвуд Голдбах проблеминин һәлли саһәсиндә ени нәтиҹәләр әлдә этдиләр.

* Өзүндән вә ваһиддән башга һеч бир там әдәдә бөлүнмәйән там әдәдләрә *әсли* әдәдләр дейилир. Мәсәлән: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...

1930-ҹу илдә совет риязийятчысы Шнирелман (1905—1938) бу саһәдә бөйүк дәйишиклик яратды.

Шнирелман исбат этди ки, һәр бир тәбии әдәди, сайы мүәййән *C*-дән артыг олмаян әсли әдәдләрин ҹәми кими көстәрмәк олар. *C* әдәди о вахт мә'лум дейил иди. Бу *C* әдәдинә „Шнирелман сабити“ ады верилди. Демәк инди Голдбах проблеми белә дейилә биләр: *Шнирелман сабити үчә бәрабәрдир.*

Сонралары бир чох риязийятчылар Шнирелманын методуну инкишаф этдирәрәк $C=67$ олдуғуну көстәрдиләр.

Шнирелманын бу аддымы риязийят элминдәки ән ҹидди вә бөйүк аддымлардандыр.

1937-ҹи илдә элм аләминдә бөйүк бир һадисә баш верди. Совет алими акад. И. М. Виноградов Голдбах проблемини демәк олар ки, тамамилә һәлл этди: *кафи бөйүк әдәдләр үчүн Голдбахын һөкмү доғрудур.*

1939-ҹу илдә Совет риязийятчысы К. Г. Бороздкин көстәрди ки,

$$e^{e^{e^{41,96}}}$$

($e=2,7182...$) әдәдиндән бөйүк олан әдәдләр үчүн Голдбахын һөкмү доғрудур. Бороздкинин бу әдәди чох бөйүк әдәддир.

Инди исә проблем Бороздкин әдәдини азалтмагдан ибарәтдир.

Әкәр бу әдәд 2.000—дән аз олса Обринин йохламаларына көрә Голдбах проблеми тамамилә мүсбәт һәлл эдилмиш олар.

Биз Голдбах проблеми һаггында бурада мә'лумат вермәкдә әлбәт ки, онун бир чох ҹәһәтдән әһәмиййәтли олмасыны нәзәрә алырыг. Эйни заманда биз бу проблемин совет риязийятчылары тәрәфиндән һәлл эдилмәсини дә хүсуси гейд этмәк истәйирик.

Әдәдләр нәзәриййәси һазырда инкишаф этмәкдә давам эдир.

4. ТӘНЛИКЛӘР

Биз билирик ки, һәр бир һесаб вә я ҹәбр әмәлинин тәрси вардыр: топламанын тәрси чыхма, вурманын тәрси бөлмә, гүввәтә йүксәлтмәнин тәрси көкалма әмәлидир. Бу тәрс әмәлләрин һәр бириси риязийята ени әдәдләр дахил эдибдир.

Инди биз мүәййән әмәлләрин һей'әтинә бахаг:

$$x^3+5x-4.$$

Бу әмәлләр һеј'әтини шәрти олараг A әмәли адландыраг.

Бурада x-ин һәр гијмәти верилдикдә A әмәлинин нәтиҹәсиндә алынан әдәди тә'јин етмәк олар.

Мәсәлән, $x=2$ оланда A әмәлинин нәтиҹәси 14 олур.

Инди биз тәрс әмәлә бахаг: фәрз едәк ки, A әмәлинин нәтиҹәси мә'лумдур, ујғун x-ин гијмәти исә ахтарылыр. Мәсәлән, фәрз едәк ки, A әмәлинин нәтиҹәси 2 дир. Ајдындыр ки, бу һалда x-ин ујғун гијмәтләриндән бириси дә $x=1$ ола биләр. Бурада A әмәлинин тәрси дедикдә буну баша дүшмәлијик:

$$x^3+5x-4=2 \qquad (1)$$

шәртини өдәјән x нечәдир? Бурада (1) ифадәси *тәнлик* адланыр. Демәк тәнлик һәлли тәрс әмәлдир.

Тәнликләр мүхтәлиф ола биләр: бир дәрәҹәли

$$x+5=6,$$

ики дәрәҹәли

$$x^2-5x+6=0$$

вә и. а.

Ријазијјатын вә башга елмләрин бир чох мәсәләләри бизи тәнликләрин һәллинә кәтирир.

Тәнликләрин һәлли мәсәләси мүһүм нәзәри вә тәҹрүби әһәмијјәтә малик олдуғундан бу саһәдә бир чох ишләр көрүлмүшдүр.

Мәктәб ҹәбр курсундан мә'лумдур ки, бир дәрәҹәли вә ики дәрәҹәли тәнликләрин һәлли (көку) тәнлијин әмсаллары васитәсилә ифадә олуна билир.

Мәсәлән, ики дәрәҹәли тәнлији көтүрәк:

$$ax^2+bx+c=o.$$

Мә'лумдур ки, бу тәнлијин көкләри

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

формуласы илә тә'јин олунур. Бурада һәлли тапмаг үчүн әмсаллар үзәриндә сонлу мигдарда әмәл апармаг лазым кәлдијини көрүрүк.

Тәнликләрә вә онларын васитәсилә мәсәләләр һәллинә илк дәфә шәрг алимләринин ишләриндә тәсадүф едилир (*Мисир папируслары, өзбәк ријазијјатчысы Мәһәммәд Әлхарәзми вә башгалары*). Биринҹи вә икинҹи дәрәҹәли тәнликләрин һәлли чохдан мә'лум иди. Үч дәрәҹәли тәнликләри

биринҹи дәфә XVI әсрдә италјан алимләри Тарталја вә Кардано һәлл етмишдир. Бунлар

$$ax^3+bx^2+cx+d=o$$

тәнлији үчүн белә бир формула тә'јин етмишләр:

$$x=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

бурада

$$p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2},$$

$$q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$$

дыр.

Италјан алими Феррари дөрд дәрәҹәли тәнлијин һәллини үч дәрәҹәли тәнлијин һәллинә кәтирмишдир.

Беләликлә XVI әсрдә дөрд дәрәҹәјә гәдәр олан тәнликләрин көкләринин тәнлијин әмсаллары илә сонлу мигдарда әмәлләр васитәсилә ифадә олундуғуну көрүрүк.

XVI әсрдән башлајараг XIX әсрин әввәлләринә гәдәр бир чох ријазијјатчылар беш вә јүксәк дәрәҹәли тәнликләрин һәлли илә мәшғул олмагларына бахмајараг һеч бир нәтиҹәјә кәлә билмәмишләр.

XIX әсрин әввәлләриндә ријазијјатчылар белә бир проблемин һәллини ортаја атдылар: дәрәҹәси 4-дән јүксәк олан һәр бир тәнлијин көкү вармыдыр?

Бу суала биринҹи дәфә франсыз алими Даламбер вә алман алими Гаусс ҹаваб вермишдир. Онлар көстәрмишләр ки, һәр бир $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ .\ .\ .\ +a_n=o$ *шәклиндә олан тәнлијин һәлли вардыр*, бу һәлл ја һәгиги әдәд, ја хәјали әдәд, јахуд да һәгиги илә хәјали әдәдләрин ҹәминдән (комплекс әдәддән) ибарәтдир.

Мәсәлән, $x^2+1=0$ тәнлијинин һәгиги һәлли јохдур. Чүнки һәгиги әдәдин квадраты мүсбәт вә ја да сыфыр олдуғундан онун мүсбәт ваһидлә ҹәми сыфыр ола билмәз. Бу тәнлијин һәлли хәјалидир: $x=\pm i$. Бурада i елә әдәддир ки, онун квадраты мәнфи ваһиддир: $i^2=-1$.

Бу теореманын исбат едилмәси илә ријазијјатчылар көкүн варлығы һаггындакы шүбһәдән чыхдылар.

Һәмин варлыг һаггындакы теореманын исбатындан сонра алимләр јүксәк дәрәҹәли тәнликләрин һәлли илә даһа чүрәтлә мәшғул олмаға башладылар. Едилән ҹәһдләр вә апарылан ишләр узун мүддәт нәтиҹәсиз галды.

Бу проблеми франсыз риязийятчысы Галуа (1811—1832) тамамилә башга методла һәлл этмәйә башлады. Онун методу ени принсипләр үзәриндә гурулмушду. Галуа өз әсәрини бөйүк франсыз академикләринә тәгдим этмишди. Лакин Галуа һеч бир чаваб ала билмәмишди.

Галуа 21 яшында икән реаксион тәшкилат тәрәфиндән дуэлдә өлдүрүлмүшдүр. О, дуэлә кетмәйә һазырлашаркән достуна яздығы мәктубунда хаһиш этмишди ки, онун элми нәтичәләри чох әһәмиййәтли олдуғундан һәмин нәтичәләри башга алимләрә, мәсәлән, Гаусса көстәрсинләр.

Бу ики тәрәфли фачиәдән 14 ил кечир. Нәһайәт Галуанын әсәрләри мәшһур франсыз алими Лиувиллин әлинә дүшүр. Биринчи дәфә онлары Лиувилл анлая билмишди. Лиувилл бир нечә мәгаләсиндә Галуанын фикир вә методларыны дәрин шәрһ этмишдир.

Лиувиллин бу мәгаләләриндән сонра бүтүн дүня Галуанын күчүнү вә онун элмдәки бөйүк хидмәтини көрдү.

Норвеч алими Абел (1802—1849) Галуанын ишләринә истинад эдәрәк биринчи дәфә белә бир теореманы исбат этди: *дәрәчәси дөрддән йүксәк олан үмуми тәнликләрин көкләрини о тәнлийин әмсаллары илә сонлу мигдарда чәбри әмәлләр васитәсилә ифадә этмәк олмаз.*

Галуанын ишләри вә онун нәтичәси олан бу теорема риязийят элминин ән бөйүк наилиййәтләриндәндир.

Галуанын тәдгигләри чәбрдә вә үмумиййәтлә риязийятда ени саһәләр ачды. Мүасир риязийятын бир чох һиссәләринин инкишафы Галуанын бу ишләринин нәтичәсиндә мүмкүн олмушдур.

Риязийятын бу саһәсинин ән ени вә характерик чәһәти ади әмәлләрин үмумиләшдирилмәсиндәдир. Бурада әмәл, әдәдләрдән фәргләнән истәнилән об'ектләр үчүн үмумиләшдирилир. Бунунла да ади чәбрдән кәнара чыхан үмуми чәбр—*али чәбр* яраныр.

Мүасир чәбрин бу һиссәләри һаггында китабчада данышмаг мүмкүн олмадығындан биз бунунла кифайәтләнирик. Али мәктәб курсунда бу һагда мә'лумат верилир.

Бурада мейдана чыхан характерик риязи проблемләрә охучунун нәзәрини чәлб этмәк истәйирик.

Риязийятда һәр бир мәсәлә гоюлараг, онун һәлл эдилмәси лазым кәлдикдә, үч үмуми характерик проблем мейдана чыхыр:

I. Мәсәләнин һәллинин варлығы,
II. Мәсәләнин һәллинин еканәлийи,
III. Һәллин тапылмасы.

Бә'зән гоюлмуш мәсәләнин һәлл эдилмәси чәтин олдуғундан һәллин варлығыны габагчадан билмәк лазым кәлир.

Чүнки гоюлмуш мәсәләнин һәлли бә'зән олмая да биләр. Мәсәлән:

$$\begin{aligned} x+y&=1, \\ 2x+2y&=4 \end{aligned} \qquad (1)$$

системинин һәлли йохдур*. Доғрудан да фәрз эдәк ки, $x=a, y=b$ системин һәллидир. Бу һалда

$$\begin{aligned} a+b&=1, \\ 2a+2b&=4 \end{aligned}$$

олмалыдыр. Бурадан биринчи бәрабәрлийи 2-йә вуруб, икинчи бәрабәрликдән тәрәф тәрәфә чыхсаг,

$$0=2$$

алынар. Бу исә ола билмәз. Демәк (1) системин һәллинин варлығы фәрзиййәси доғру дейилдир, йәни (1) системинин һәлли йохдур.

Одур ки, һәр бир гоюлмуш мәсәләнин һәлли үчүн, онун варлығынын габагчадан билинмәси проблеминин чох бөйүк әһәмиййәти вардыр.

Икинчи проблем һәллин еканәлийи, йә'ни гоюлмуш мәсәләнин һәлләринин сайыны билмәк проблемидир.

Бу проблемин әһәмиййәти айдындыр. Бә'зән бу проблемин принсипиал әһәмиййәти олур. Мәсәлән, мүәййән физики һадисәнин тәдгиги риязи мәсәләйә кәтирилдикдә әввәлдән һадисәни төрәдән шәртләрин һамысынын нәзәрә алынмасынын йохланылмасы лазым кәлир, йә'ни нәзәрә алынан шәртләрин һей'әти һадисәнин яранмасыны тә'мин эдә билирми суалы ортая чыхыр.

Үчүнчү проблем исә биринчи проблемдән чох фәрглидир. Бурада сөз һәллин фактик тапылмасы һаггында кедир. Бә'зән гоюлмуш мәсәлә һәллинин варлығы мә'лум олдуғуна бахмаяраг, онун фактик тапылмасы чох бөйүк чәтинлик төрәдир.

Мәсәлән, Гауссун теоремасына көрә

$$x^5+1{,}01x^4+1{,}375x^3+1{,}037x^2+1{,}2x+1=0$$

тәнлийинин һәлли вардыр. Лакин бу һәллин фактик тапылмасы мүәййән методларын ишләнилмәсини тәләб эдир вә бу тәнлийин һәлл эдилмәси мүәййән чәтинликләрлә бағлыдыр.

---

* Гауссун теоремасы бир мәчһуллу бир тәнлийә аиддир.

5. БҮТӨВӘ КӨРӘ ҺИССӘНИ, ҺИССӘЙӘ КӨРӘ БҮТӨВҮ ТӘ'ЙИН ЭТМӘК

Мүнтәзәм һадисәләр о һадисәләрә дейилир ки, орада һадисәнин бәрабәр заманлара, яхуд үмумиййәтлә эйни шәраитә уйғун һиссәләри эйни олсун.

Һадисәләр мүнтәзәм олсалар онлары дөрд һесаб әмәлләри илә өйрәнмәк олар.

Мәсәлән, фәрз эдәк ки, чисим мүнтәзәм (бәрабәр сүр'әтли) олараг 20 санийәдә 160 см йол кедир, чисмин сүр'әти нә гәдәрдир, йә'ни бир санийәдә бу чисим нә гәдәр йол кедир. Айдындыр ки, ахтарылан сүр'әт

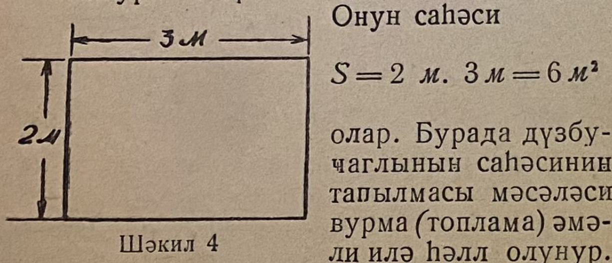
$$v = \frac{160\ см}{20\ сан} = 8\ \frac{см}{сан}$$

олур. Демәк мәсәлә бөлмә әмәли илә һәлл олунур.

Фигура 4-чү шәкилдәки кими дүзбучаглыдыр. Онун саһәси

$$S = 2\ м.\ 3м = 6\ м^2$$

олар. Бурада дүзбучаглынын саһәсинин тапылмасы мәсәләси вурма (топлама) әмәли илә һәлл олунур.



Шәкил 4

Инди биз фәрз эдәк ки, сәрбәст дүшән чисмин сүр'әтини тапмаг лазымдыр вә я 5-чи шәкилдә көстәрилән әйри фигуранын саһәсини тапмаг лазымдыр.

Шәкил 5

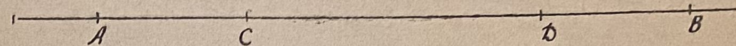
Бу мәсәләләри артыг әввәлки методларла һәлл этмәк олмаз. Чүнки сәрбәст дүшән чисим бәрабәр сүр'әтли һәрәкәт этмир; Галилейә көрә сәрбәст дүшән чисим биринчи санийәдә 5 *м.* икинчи санийәдә 15 *м.* үчүнчү санийәдә 25 *м.* йол кедир. Айдындыр ки, бурада һәрәкәт һәр ан дәйишир.

Икинчи мәсәләдә биз әйри хәтли фигуранын саһәсини тапмалыйыг. Бурада даһа юхарыдакы чәмләмә методу ярамаз. Чүнки верилмиш фигураны сонлу сайда дүзбучаглылара вә я трапесиялара яхуд да үчбучаглара чевирмәк мүмкүн дейил.

Бу мәсәләләри вә буна охшар мәсәләләри һәлл этмәк үчүн ени методларын ярадылмасы лазым кәлир.

Мәсәлә А. *Мүнтәзәм һәрәкәт этмәйән чисмин сүр'әтини тә'йин этмәк* (Нютонун мәсәләси). Асан олмаг үчүн

һәрәкәти дүзхәтли фәрз эдәк. Тутаг ки, һәмин һәрәкәтдә чисим *A* нөгтәсиндән *B* нөгтәсинә көчмүшдүр (шәкил 6).



Шәкил 6

Әкәр *AB*-нин *S* узунлуғуну, сәрф олунан *t* замана бөлсәк:

$$v = \frac{S}{t},$$

v әдәди бизә анчаг „орта сүр'әти" верәр, йә'ни дейә биләрик ки, әкәр чисим *v* сүр'әтилә бәрабәр сүр'әтли һәрәкәт этсә *t* заманында *S* гәдәр йол кедәр. Айдындыр ки, йолун бир һиссәси олан $S_1=CD$-ни көтүрсәк вә бу йолун кедилмәсиндә t_1 заманы сәрф олунубса

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1}$$

чисмин *CD*-дәки орта сүр'әти олар. Лакин *CD*-дә дә һәр ердә сүр'әт эйни вә v_1 дейилдир. Чүнки бу һиссәдә дә һәрәкәт дәйишилир.

Одур ки, Нютон гоюлан мәсәләйә белә янашыр: *C* нөгтәсини гейд эдир; сонра t_1 нә гәдәр кичик олса, *CD*-нин узунлуғу да бир о гәдәр кичик олар вә бу кичик заманда (яхуд мәсафәдә) һәрәкәт аз дәйишиләр. Биз бу кичик заманда һәрәкәти тәгрибән мүнтәзәм фәрз эдә биләрик. Заман нә гәдәр аз олса, һәрәкәтин дәйишмәси дә аз олар.

Белиликлә биз һәрәкәти мүәййән мигдарда кичик һиссәләрә бөлүрүк вә һәр һиссәдә орта сүр'әти тапыб һәрәкәти тәгрибән тәзә һәрәкәтлә, йә'ни һиссә-һиссә мүнтәзәм һәрәкәтлә әвәз эдирик.

Бурада тәбии белә бир суал мейдана чыхыр: бу һиссәләри нә бойда көтүрмәк лазымдыр? Бу суала мүәййән чаваб вермәк мүмкүн дейил. Чүнки бу һиссәләрин бою тәләб олунан дәгигликдән асылыдыр. Нә гәдәр дәгиглик чох олса, йә'ни нә гәдәр верилән һәрәкәтлә тәртиб олунан һиссә-һиссә мүнтәзәм һәрәкәтин яхын олмасы лазым кәлсә, о гәдәр дә о һиссәләр кичик олмалыдыр.

Нютон бу гейри-мүәййәнлийи арадан галдырмаг үчүн илк әввәл ән кичик заман вә мәсафә, йә'ни заманын, мәсафәнин атомуну ахтарырды.

Лакин сонралар мә'лум олду ки, белә янашмаг доғру дейилдир. Чүнки һәм заман, һәм дә мәсафә сонсуз олараг бөлүнә билирләр. Одур ки, нә заманын, нә дә мәсафәнин атому һаггында данышмаг олмаз.

Даhа сонралар мәшһур франсыз алими Коши бу мәсәләни белә һәлл эдир. Әкәр әлә бир t_1-дән асылы олмаян вә $\frac{S_1}{t_1}$ әдәдиндән истәнилән гәдәр аз фәргләнән v_c әдәди варса, һәмин v_c әдәдинә һәрәкәтин C нөгтәсиндәки сүр'әти дейилир.

Бурада биз „истәнилән гәдәр аз фәргләнсин" ифадәсини айдынлашдыраг. Истәнилән гәдәр аз фәргләнмәни белә дүшүнүрүк: һансы бир кичик ε әдәди көтүрүрүксә көтүрәк бу әдәдә гаршы әлә t_1^0 әдәди вардыр ки, $t_1 < t_1^0$ олдугда

$$\left|v_c - \frac{S_1}{t_1}\right| < \varepsilon$$

олур.

Бурада көрүрүк ки, артыг v_c көтүрүлән һиссәләрдән асылы дейилдир: о һәрәкәти анҹаг C нөгтәсиндә тә'йин эдир, белә ки, әкәр ҹисим C нөгтәсиндән башлаяраг v_c сүр'әти илә һәрәкәт этсә тәгрибән

$$S_1 = v_c t_1$$

олар. Әлбәт ки, бурада t_1 нә гәдәр аз олса, бу бәрабәрлийин хәтасы да аз олар. v_c—йә *ани сүр'әт* дейилир.

Беләликлә биз ики анлайышла таныш олмуш олуруг: ени сүр'әт вә лимит просеси.

Демәк гейри-мүнтәзәм һәрәкәтин анҹаг һәр андакы сүр'әтиндән данышмаг олар.

v_c-нин тә'рифиндә юхарыда тәсадүф этдийимиз просесә исә *лимит просеси* дейилир. Гыса олараг лимит просеси беләдир: t_1 азалдыгҹа $\frac{S_1}{t_1}$ кәмиййәти дәйишә-дәйишә v_c кәмиййәтинә яхынлашыр.

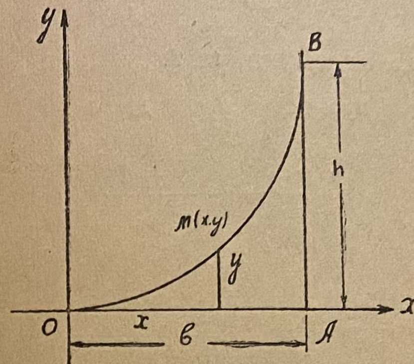
Ани сүр'әт анлайышынын элмдә бөйүк әһәмиййәти вардыр. Бу анлайыш Нютонун кәшф этдийи элми анлайышлардан ән әһәмиййәтлиләриндәндир.

Лимит просеси исә риязийят элминдә ән әсас просесләрдәндир. Бунун әһәмиййәти техниканын вә физиканын бир чох мәсәләләринин һәллиндә ойнадығы бөйүк ролла тә'йин эдилир.

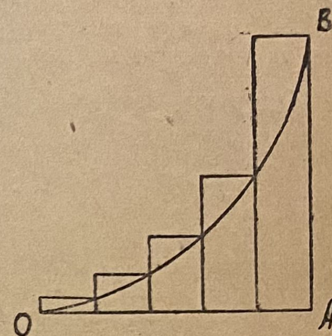
Демәк гейри-мүнтәзәм һадисәләрин тәдгигиндә ани сүр'әт вә лимит просеси мүһүм рол ойнайырлар.

Мәсәлә В. OAB әйри хәтли үчбуҹагын саһәсини тә'йин этмәли (*шәкил 7*) (Архимедин мәсәләси); бурада $y = ax^2$ олдуғу нәзәрә алынмалыдыр.

Архимед бу мәсәләни белә һәлл этмишдир: о, OA парчасыны n бәрабәр һиссәйә бөлүр вә бөлкү нөгтәләриндән AB-йә параллел дүз хәтләр кечирир. Сонра һәр әйри хәтли трапесияны 8-чи шәкилдә көстәрилмиш дүзбуҹаглы илә әвәз эдир. Бу дүзбуҹаглыларын саһәләрини тә'йин эдир вә онлары ҹәмләйир. Бу ҹәм верилмиш OAB фигурасынын тәгриби саһәсидир. Айдындыр ки, бурада алынан ҹәм OAB фигурасынын артыглығы илә саһәсинә бәрабәрдир.



Шәкил 7



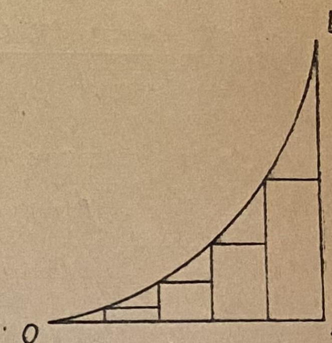
Шәкил 8

9-ҹу шәкилдәки кими көтүрсәк уйғун ҹәм OAB фигурасынын азлығы илә саһәсинә бәрабәр олар. 8-чи шәкилдәки дүзбуҹагларын саһәләрини уйғун олараг $s_1, s_2, \cdots, s_n$ илә ишарә эдәк. Айдындыр ки, дедийимиз ҹәм белә тә'йин олар:

$$S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

вә дедийимиз кими

$$\text{саһә } OAB < S_n.$$



Шәкил 9

Әкәр n-и сонсуз артырсаг S_n азала-азала OAB фигурасынын саһәсинә яхынлашар, n нә гәдәр бөйүк көтүрүлсә S_n дә о гәдәр OAB фигурасынын саһәсинә яхын олар.

Буну нәзәрә алараг, дүзбуҹаглыларын саһәләрини тә'йин эдәк:

$$s_1 = \frac{b}{n} \cdot a \left(\frac{b}{n}\right)^2,$$

$$s_2 = \frac{b}{n} \cdot a \left(\frac{2b}{n}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = \frac{b}{n} \cdot a \left(\frac{nb}{n}\right)^2;$$

нәтиҹәдә

$$S_n = \frac{ab^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\dots+n^2\right) \qquad (1)$$

формуласы әлдә эдилир. Бу формула истәнилән n үчүн S_n-ин гиймәтини верир. Бу формуланын нөгсаны бурададыр ки, n артдыгҹа мө'тәризәләрдәки һәдләрин сайы да артыр.

Одур ки, Архимед белә бир формула тапмышдыр:

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

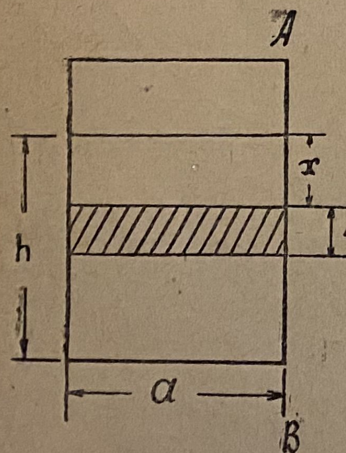
(йохлайын!).

Бу формулая әсасән (1) формуласыны

$$S_n = \frac{ab^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{ab^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

шәклиндә яза биләрик. Бурадан исә n чох бөйүдүкҹә S_n азала-азала

$$S=\frac{bh}{3} \qquad (2)$$



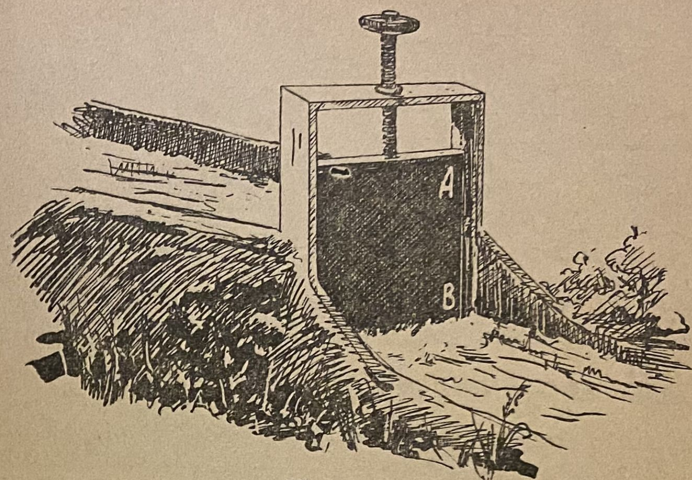
Шәкил 10

гиймәтинә яхынлашдығыны көрүрүк ($h = ab^2$, 7-ҹи шәклә бах). Демәк OAB фигурасынын саһәси (2) формуласы васитәсилә тә'йин олунур.

Биз бурада да лимит просесиндән истифадә этдик: һәр бир истәнилән кичик ε әдәдинә гаршы элә n_0 вардыр ки, $n > n_0$ оланда

$$\left|\frac{ab^3}{3}-S_n\right|<\varepsilon$$

олар.



Шәкил 11

6. СОНСУЗ КИЧИЛӘНЛӘР АНАЛИЗИ

Биз кечән параграфдакы A вә B мәсәләләрини һәлл этдикдә *дәйишән кәмиййәтләр*, *сонсуз кичилән кәмиййәтләр* (A мәсәләсиндә S_1 мәсафәси, t_1 заманы; B мәсәләсиндә кичилән саһә), *сонсуз бөйүйән кәмиййәтләр* (бөлкүләрин сайы) кими анлайышлара тәсадүф этдик.

Һәмин мәсәләләри һәлл этдикдә ени әмәлләрә тәсадүф этдик: ики сонсуз кичилән кәмиййәт нисбәтинин лимитини тә'йин этмәк (A мәсәләсиндә), мигдары сонсуз артан сонсуз кичиләнләрин ҹәминин лимитини тапмаг (B мәсәләсиндә).

Дедийимиз анлайышлардан вә әмәлләрдән истифадә эдәрәк A вә B кими мәсәләләрин һәлли илә мәшғул олан риязийятын һиссәсинә *сонсуз кичиләнләр анализи* дейилир. Сонсуз кичиләнләр анализи XVII әсрдә Нютон вә Лейбнис тәрәфиндән ярадылмышдыр. Сонралары о XVIII—XIX әсрләрдә бөйүк риязийятчылар тәрәфиндән инкишаф этдирилмишдир. Сонсуз кичиләнләр анализи һазырда да инкишаф этдирилир. Бу саһәдә совет риязийятчыларынын ишләри дүня әдәбиййатында ән көркәмли ер тутур.

Сонсуз кичиләнләр анализинин биринҹи типли мәсәләләри тәдгиг эдән һиссәсинә *диференсиал һесабы*, икинҹи типли мәсәләләри тәдгиг эдән һиссәсинә исә *интеграл һесабы* дейилир. Диференсиал латынҹа фәрг, интеграл исә бүтөв демәкдир.

Сонсуз кичиләнләр анализи мүасир техниканын вә физиканын әсас тәдгиг методларындандыр.

Фикримизи бир даhа изаh этмәк үчүн тәтбиги әhәмиййәти олан садә бир мәсәләнин hәллини көстәрәк.

Мәсәлә. Каналда h йүксәклийиндә су вардыр. Бу суюн гаршысыны сахлаян AB шлюзуна тә’сир эдән гүввәни тә’йин этмәк лазымдыр. (шәкил 11).

Бурада hадисә гейри-мүнтәзәмдир: суюн мүхтәлиф дәринликләрдә тәзйиги мүхтәлифдир, дәринлик артдыгча тәзйиг дә артыр. Даhа дәгиг оларағ десәк, x дәринлийиндә тәзйиг γx дыр. Бурада γ суюн хүсуси чәкисисидир ки, ону ваhид көтүрмәк олар.

Мәсәләни hәлл этмәк үчүн әввәлки гайдая көрә h йүксәклийини n бәрабәр hиссәйә бөләк, онда hәр золағын эни $\frac{h}{n}$, узунлуғу исә a олар (шәкил 10).

Инди hәр золагдакы тәзйиги сабит көтүрсәк, йә’ни hадисәни hәр золагда мүнтәзәм фәрз этсәк, золагларын hамысына тә’сир эдән гүввә ашағыдакы чәм илә тә’йин олунар:

$$F_n=\gamma\frac{h}{n}\cdot a\frac{h}{n}+\gamma\frac{2h}{n}\cdot a\frac{h}{n}+\ldots+\gamma\frac{nh}{n}\cdot a\frac{h}{n}.$$

Енә дә F_n ахтардығымыз гүввәйә бәрабәр дейилдир. Чүнки золагларын эни нә гәдәр кичик олурса олсун, онларда тәзйигин яйылмасы мүнтәзәм вә сабит дейилдир. Одур ки, биз n—и сонсуз артырыб F_n-нин лимитини тә’йин этмәлийик. Һәмин мәсәләдә бу лимити тапмаг чәтин дейилдир. Доғрудан да

$$F_n=\frac{\gamma ah^2}{n^2}(1+2+\ldots+n)$$

олдуғу айдындыр. Мә’лумдур ки,

$$1+2+\ldots+n=\frac{(1+n)\,n}{2}$$

формуласы доғрудур (йохлайын!). Бу halда

$$F_n=\frac{\gamma ah^2}{n^2}\cdot\frac{(1+n)\,n}{2}=\frac{\gamma ah^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

алыныр, n артанда $\frac{1}{n}$ кичиләрәк сыфра яхынлашыр. Одур ки, F_n-нин лимити

$$F=\frac{\gamma ah^2}{2}$$

олур. Бу исә мәсәләнин hәллини верир.

Демәк шлюза тә’сир эдән гүввә суюн дәринлийи квадраты илә, энинин исә өзү илә дүз пропорсионалдыр.

Элә бу садә мәсәләнин hәллиндән сонсуз кичиләнләр анализинин нечә бөйүк әhәмиййәтә малик олдуғу көрүнүр.

Гейд этмәк лазымдыр ки, биз бурада чох садә мәсәләләрин hәлли үзәриндә сонсуз кичиләнләр анализинин мүндәрәчәсини көстәрдик. Кечән параграфдакы A вә B типли hәр бир мәсәләни hәлл этмәк үчүн мүхтәлиф лимитләрин hесабланмасы методлары ярадылмышдыр.

Сонсуз кичиләнләр анализинин әмәлә кәлмәсилә риязийята *дәйишән кәмиййәтләр* дахил эдилмишдир. Дәйишән кәмиййәтләрә, дәйишән лимит просесиндә дә тәсадүф эдилир.

Эйни заманда чох мүhүм олан ени бир анлайыш да яранныр. Бир кәмиййәтин гиймәти икинчи кәмиййәтин гиймәтиндән асылы олур. Икинчи кәмиййәт дәйишсә биринчи дә дәйишәр. Мәсәлән, әввәлки мәсәләдә суюн сәвиййәси дәйишсә шлюздакы тәзйиг дә дәйишәр вә и. а. Башга сөзлә суюн крандакы тәзйиги су сәвиййәсинин функсиясыдыр. Бу кими асылылыға hәр ердә—техникада тәсадүф этмәк олар. Белә асылылыға функсионал асылылыг дейәрләр. Одур ки, риязийята *функсия* анлайышы дахил эдилмишдир.

7. ДИФЕРЕНСИАЛ ВӘ ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Биз 5-чи параграфда бүтөвә көрә hиссәни, hиссәйә көрә бүтөвү тә’йин этмәк haггындакы мәсәләләри тәдгиг эдирдик. Бу мәсәләләр бири дикәринин тәрси олан садә мәсәләләрдән ибарәтдир.

Тәбиәти өйрәндикчә вә техниканын бир чох проблемләрини hәлл этдикчә даhа мүрәккәб мәсәләләрә тәсадүф этмәк олур.

Бу мәсәләләр ашағыдакылардан ибарәтдир:

1) Кәмиййәтләрин hиссәләри арасында мүәййән мүнасибәтләр верилмишдир; кәмиййәтләрин өзләри арасындакы мүнасибәти тапмаг лазымдыр.

2) Кәмиййәтләрин өз араларында мүнасибәтләр верилмишдир; о кәмиййәтләри тапмаг лазымдыр.

3) Кәмиййәтләрин hиссәләрилә онларын бә’зиләри арасында мүәййән мүнасибәт верилмишдир; о кәмиййәтләри тапмаг.

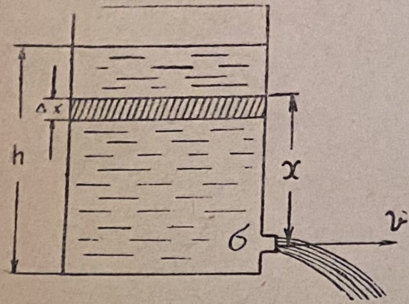
Дедиййимиз мәсәләләрдә мүнасибәтләр үмумиййәтлә бәрабәрликләрлә верилир.

Биринчи тип мүнасибәтләрә *диференсиал тәнликләр*, икинчи тип мүнасибәтләрә *интеграл тәнликләр*, нәhайәт үчүнчү тип мүнасибәтләрә *интегро-диференсиал* тәнликләр дейилир.

Бунлары изаһ этмәк үчүн бә'зи хүсуси мәсәләләри тәдгиг эдәк.

Мәсәлә. Силиндрик чәндә су сәвиййәсинин һүндүрлүйү h-дыр. Су чәндән нә гәдәр вахта бошалар (12-чи шәкил).

Бурада көрүрүк ки, һадисә гейри-мүнтәзәмдир. Һадисәнин кедиши суюн йүксәклийиндән асылыдыр, йүксәклик исә дәйишәндир.



Шәкил 12

Торичеллинин мүшаһидәләринә көрә ахма сүр'әти белә тә'йин олунур:

$$v=\sqrt{2gx}$$

бурада g ер күрәсинин чазибә гүввәсинин тә'чилидир ($g=9{,}8$ *м/сан*²)

Инди биз һадисәнин һиссәләри арасында мүнасибәт ярадаг.

Фәрз эдәк ки, t заман кечәндән сонра суюн сәвиййәсинин йүксәклийи x-дир. Чәнин эн кәсийинин S олдуғуну нәзәрә алсаг вә t заманы Δt гәдәр дәйишсә чәндән бошалан суюн һәчми $S\Delta x$ олар. Дикәр тәрәфдән исә, кранын эни σ олса төкүлән суюн һәчми $\sigma v \Delta t$ олар.

Бурада

$$S\Delta x=-\sqrt{2gx}\,\sigma\,\Delta t \qquad (1)$$

бәрабәрлийини яза биләрик. Бурадакы мәнфи ишарәси она көрәдир ки, t артанда x азалыр, йә'ни t-нин артымы Δt мүсбәт оланда x-ин артымы Δx мәнфи олур. Бәрабәрлик исә дүзкүн олмаг үчүн мәнфи ишарәсинин гоюлмасы лазымдыр.

Беләликлә биз x вә t кәмиййәтләринин һиссәләри арасында мүәййән мүнасибәт, йә'ни мүәййән диференсиал тәнлик дүзәлтмиш олуруг. Тә'йин этмишләр ки, (1) тәнлийиндән

$$t=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

алыныр. Бу тәнлийин һәлли бир чох мә'луматын верилмәсини тәләб эдир. Одур ки, бу вә башга тип тәнликләр үзәриндә даянмаячайыг. Анчаг гейд этмәк лазымдыр ки, диференсиал, интеграл вә интегро-диференсиал тәнликләр мүасир риязиййатын әсас чәбһәсиндәдирләр. Чүнки онларын инкишафы физика вә техниканын инкишафы илә әлагәдардыр. Тәйярәчилик, бөйүк кәмиләрин иншасы, бөйүк биналарын вә көрпүләрин гурулушу, маторларын ярадылмасы, мүхтәлиф тәбиәт һадисәләринин өйрәнилмәси риязиййатын бу һиссәсилә чох бағлыдыр. Чүнки чох вахт бу дедикләримизлә

әлагәдәр олан һадисәләрин бүтөв ганунларыны тапмаг мүмкүн дейилдир; лакин һадисәләрин һиссәләриндәки гануниййәти тапмаг нисбәтән асан олур. Одур ки, һиссәләрә аид олан ганундан алынан тәнликләр, мәсәлән диференсиал тәнликләрин һәлл эдилмәси риязиййат элминин гаршысында дуран ән әсас мәсәләләрдән бирисидир. Риязиййат диференсиал тәнликләри һәлл этмәклә кәмиййәтләр арасында мүнасибәт ярадыр. Бу исә бөйүк әһәмиййәтә маликдир.

8. СОНСУЗ ЧӘМЛӘР ҺАГГЫНДА

Риязиййатда сонсузлуғ анлайышына биринчи дәфә тәбии әдәдләрдә тәсадүф эдилмишдир. Тәбии әдәдләр чохлуғу сонсуздур, йә'ни тәбии әдәдләрин ән бөйүйү йохдур:

1,2,3,4 . . .

Язылан үч нөгтә тәбии әдәдләр сырасынын сонсуз оларағ давам этдийини көстәрир. Бу анлайыша бөлмәдә дә тәсадүф эдилир. Мәсәлән, 10:3 көтүрәк. Бурада

```
10 | 3
 9 |0,333 . . . .
--
10
 9
--
10
 9
--
 1 . . .
```

Демәк бурада 0,333... сонсуз онлуг кәсри алыныр. Бу кәср белә бир сонсуз чәм кими язылыр:

$$0{,}333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$$

Сонсузлуг анлайышына көкалма әмәлиндә дә тәсадүф эдилир. Мәсәлән:

$$\sqrt{2}=1{,}41\ldots$$

Беләликлә көрүрүк ки, сонсуз чәмләр инсанлара чох гәдимдән мә'лум имиш вә сонсуз чәмләр бир чох мәсәләләрин тәдгигиндә гаршыя чыхыр.

Одур ки, риязиййатда сонсуз чәмләрин өйрәнилмәси әсас мәсәләләрдән бириси олмушдур.

Бурада һәр шейдән габаг сонсуз чәм нә олдуғунун тә'рифини вермәлийик.

Ихтияри сонсуз чәм көтүрәк:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Бурада $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ мүәййән әдәдләрдир.

Биз бурада

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

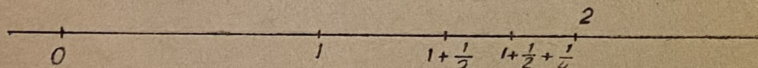
ардычыллығыны тәртиб эдәк. Әкәр n сонсуз артдыгда S_n-нин мүәййән лимити варса бу лимитә (1)-ин чәми дейәчәйик. Әкс һалда дейәчәйик ки, (1) чәми йохдур.

Сонсуз чәм ола да биләр, олмая да биләр. Бунун үчүн мисаллар кәтирәк.

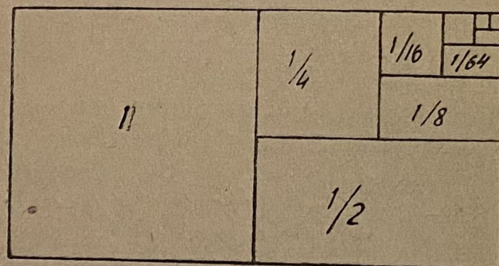
Мисал 1.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

сонсуз чәмини тәдгиг эдәк. Бу сонсуз чәмин варлығы һәр ики шәкилдән көрүнүр (13 вә 14-чү шәкилләрә бах). Һәр ики шәкилдән көрүнүр ки, бу сонсуз чәм 2 дир.



Шәкил 13



Шәкил 14

Мисал 2.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \qquad (2)$$

сонсуз чәмини көтүрәк. Көстәрәк ки, бу сонсуз чәмин чәми йохдур, башга сөзлә онун чәми сонсузлугдур.

Бунун үчүн ону белә груплашдыраг:

$$[1] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \ldots \qquad (3)$$

Айдындыр ки,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

вә и. а.

Инди биз белә бир сонсуз чәмә бахаг:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \qquad (4)$$

Айдындыр ки, бу сонсуз чәмин чәми сонсузлугдур. Чүнки $\frac{1}{2}$-ләрин сайы сонсуз артыр, она көрә чәм дә сонсуз артачагдыр.

(4)—үн һәр һәдди (3)—дәки мөтәризәләрдән бөйүк дейил. (4)—үн чәми сонсуз олдуғундан (3)—үн дә чәми сонсуз олар, йә'ни (2)—нин чәми сонсуздур.

Сонсуз чәмләр мүасир риязийятын ән әһәмиййәтли васитәләриндәндир. Мәсәлән, гам вә кәсирлә ифадә ола билмәйән ифадәләр мүмкүн олан һалларда сонсуз чәмләрлә ифадә этдирилир.

Даһа бир мисал кәтирәк. 1-и $(1-x)$-ә бөлсәк аларыг:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x \\ \mp 1 \pm x & \overline{1+x} \\ \hline +x & \\ \mp x \pm x^2 & \\ \hline x^2 \ldots & \end{array}$$

Демәк

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (5)$$

Дәгиг апарылан тәдгигат көстәрир ки, (5) ифадәси анчаг x-ин мүтләг гиймәтчә ваһиддән кичик гиймәтләриндә доғрудур. Буну вә бунун сәбәбини сонсуз кичиләнләр анализиндә көстәрмәк олур.

Даһа бир мисал көтүрәк. Көстәрмәк олур ки,

$$\lg_{10}(1+x) \cong 0{,}4342 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right] \qquad (6)$$

олур вә бу $|x| < 1$ үчүн доғрудур.* Бу вә бундан алынан формулалар васитәсилә әдәдләрин логарифмалары тә'йин эдилир вә логарифма ҹәдвәлләри гурулур.

Сонсуз ҹәмләрин ишләнилмәсиндә ашағыдакы проблемләр ортая чыхыр:

1. **Верилмиш кәмиййәти сонсуз ҹәмлә ифадә этмәк методу.** Биз бурада анҹаг садә бөлмә методуну ишләтдик. Бундан башга бир чох методлар да вардыр.

2. **Алынан сонсуз ҹәм һансы шәртләрдә мүәййән ҹәмә маликдир.**

3. **Сонсуз ҹәмин ҹәмини тапмаг методлары.** Бу методлардан ән үмумиси сонлу мигдарда биринҹи һәдләри көтүрүб ҹәмләмәк вә атылан һиссәни гиймәтләндирмәкдән ибарәтдир; демәк үмумиййәтлә сонсуз ҹәмин ҹәми тәгриби тапылыр.

4. **Сонсуз ҹәмләри элә дәйишдирмәк лазымдыр** ки, о даһа тез йығылсын, йә'ни ҹәмин тәгриби гиймәтини тапмаг үчүн даһа аз мигдарда һәдд көтүрмәк лазым кәлсин.

Бу проблемләр риязиййатын ән әһәмиййәтли проблемләриндәндир. Бу проблемләрин һәм нәзәри, һәм дә тәҹрүби әһәмиййәти вардыр.

Сонсуз ҹәмләрин әһәмиййәти ондан ибарәтдир ки, бурада мүрәккәб ифадәләр садә ифадәләрин ҹәми кими көстәрилир. Мисал үчүн (6) формуласыны көтүрмәк олар.

Сонсуз ҹәмләрин тәдгиги һазырда енә дә давам эдир.

9. МАКСИМУМ ВӘ МИНИМУМ ҺАГГЫНДАКЫ МӘСӘЛӘЛӘР

Инсан тәҹрүбәсиндә бә'зән элә проблемләр алыныр ки, орада бир кәмиййәтин мүмкүн олан гиймәтләринин ичәрисиндә ән бөйүк яхуд ән кичик гиймәтин нә вахт алынаҹағынын билинмәси лазым кәлир.

Мисал үчүн белә бир мәсәләни тәдгиг эдәк. Узунлуғу C олан бир чәпәр вардыр. Диварын янында саһәси ән бөйүк олан дүзбуҹаглы бир ери бу чәпәрлә әһатә этмәк лазымдыр. (шәкил 15-ә бах).

Бу шәкилдән айдындыр ки, ахтарылан бу ерин өлчүләри x вә $C-2x$-дир. О һалда һәмин саһә

$$S = x(C-2x)$$

олар. Бурада көрүрүк ки, x дәйишәндә ерин саһәси S-дә дәйишир. Мәсәлән, $x = \frac{C}{3}$ оланда $S = \frac{C^2}{9}$ олур; $x = \frac{C}{5}$

* 10-чу параграфа бахын.

оланда $S = \frac{3C^2}{25}$ олур, $x = \frac{C}{2}$ оланда $S = 0$, $x = 0$ оланда S енә дә сыфыр олур. Демәк 0 илә $\frac{C}{2}$ арасында x үчүн элә гиймәт вардыр ки, о гиймәтдә S ән бөйүк гиймәт алыр.

Инди мәсәләни һәлл эдәк. Бунун үчүн S-и белә язаг:

$$S = -2\left(x - \frac{C}{4}\right)^2 + \frac{C^2}{8}.$$

Шәкил 15

Бурада көрүрүк ки, x дәйишдикдә анҹаг биринҹи топланан дәйишир вә бу топланан да һәмишә мүсбәт дейилдир.

Одур ки, S-ин ән бөйүк гиймәти бу һәддин сыфыр гиймәтиндә, йә'ни $x = \frac{C}{4}$ гиймәтиндә алыныр. Демәк мәсәлә белә һәлл олунур: чәпәрин учларындан онун дөрддә бири гәдәри гатланмалыдыр. Демәк

$$S_{max} = \frac{C^2}{8}$$

олур.

Икинҹи бир мәсәлә һәлл эдәк:

$x^2-6x+21$ үчһәдлисинин ән кичик гиймәтләрини тапын. Бунун гиймәтини y-лә ишарә эдәк:

$$y = x^2-6x+21.$$

һәмин методла бу мәсәләни һәлл эдәк. Айдындыр ки,

$$y = (x-3)^2+12$$

олур. Бурада y-ин минимуму $x=3$ гиймәтиндә алындығыны көрүрүк. Демәк

$$y_{min} = 12$$

дир.

Башга мәсәләләрә бахсаг орада ифадәләр чох мүрәккәб алыныр. Одур ки, чох вахт көстәрдиййимиз бу метод ярамыр. Демәк бизим юхарыда ишләтдиййимиз метод, үмуми метод дейилдир.

кәмиййәтләрин ән бөйүк вә ән кичик гиймәтләринин тапылмасында ишләнилән үмуми методлары бизә енә дә сонсуз кичиләнләр анализи верир.

Риязиййатын гаршысына даһа мүрәккәб мәсәләләр дә гоюлур:

Узунлуғу l олан гапалы сап верилмишдир: бу сап һансы форманы алмалыдыр ки, тә'йин этдийи саһә максимум (ән бөйүк) олсун.

Даһа бир мисал көтүрәк. Физикадан мә'лумдур ки, ишыг мүһитдә ән аз заман сәрф олунан йолла яйылыр. Одур ки, о йолун формасы elә олмалыдыр ки, сәрф олунан заман мүмкүн гәдәр аз (ән кичик) олсун.

Бу вә бу кими мәсәләләрин һәлли чох мүкәммәл методлар тәләб эдир. Бу методлары енә дә сонсуз кичиләнләр анализи вә онун сонраки инкишафы яратмагдадыр. Мүрәккәб максимум вә минимум мәсәләләрини һәлл этмәк үчүн риязиййатда хүсуси һиссә яранмышдыр. Буна вариасия һесабы дейирләр. Вариасия һесабынын инкишафында вә онун мәсәләләринин һәллиндә Совет риязиййатчыларынын бөйүк хидмәтләри вардыр.

10. БӨЙҮК ҺЕСАБЛАМАЛАР

Мәшһур Данимарка алими Тихо Браге (1546—1601) планеталарын күнәш әтрафындакы һәрәкәтләрини узун мүддәт мүшаһидә этмишдир. Бу мүшаһидәләрин нәтиҹәсиндән истифадә эдәрәк алман алими Кеплер (1571—1630) планеталарын һәрәкәт ганунларыны тә'йин этмишдир:

1. Планеталар мүәййән мүстәвиләрдә эллипс хәтләри үзрә һәрәкәт эдирләр, беләки, күнәш бу эллипсин фокусларынын бирисиндә ерләшибдир.

Эллипс 17-чи шәкилдә көстәрилән кими рәсм олуна билән хәттә дейирләр.

2. Һәр планетанын радиус вектору бәрабәр заманларда бәрабәр саһәләр чызыр.

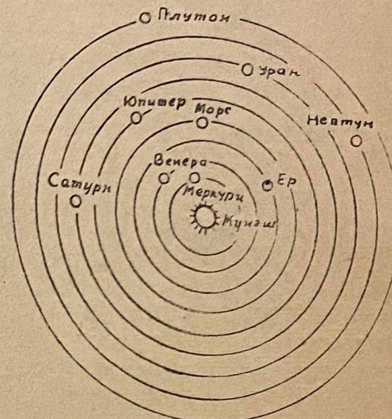
3. Һәр планетанын күнәш әтрафында дөврэтмә заманы квадратынын онун күнәшдән олан орта мәсафәсинин кубуна олан нисбәти сабит кәмиййәтидир (шәкил 16)

$$\frac{T^2_{\text{меркури}}}{R^3_{\text{меркури}}} = \frac{T^2_{\text{венера}}}{R^3_{\text{Венера}}} = \frac{T^2_{\text{Ер}}}{R^3_{\text{Ер}}} = \ldots = \text{сабит}$$

Кеплер бу үч гануну әлдә этмәк үчүн бир чох бөйүк әдәдләр үзәриндә чәтин һесабламалар апармыш, бир нечә ил вахт сәрф этмишдир. Лакин һазырки риязийят машынлары бу һесабламалары бир нечә күндә әлдә эдә биләрләр.

Одур ки, һәчмән чох бөйүк олан һесабламлары апармаг үчүн инсанлар чох васитәләрдән истифадә этмәйә чалышмышлар. Бу васитәләр һесабламалары я дәгиг, я да истәнилән дәгигликлә апарыр.

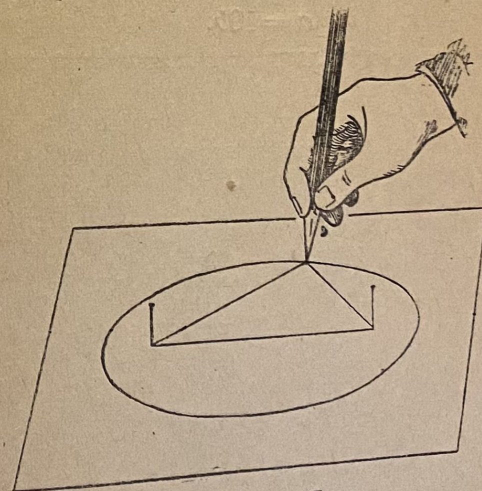
Бу васитәләр һаггында мүәййән тәсәввүр яратмаг үчүн онларын бә'зиләри һаггында бир гәдәр мә'лумат верәк.



Шәкил 16

Мәсәлән, ики әдәдин вурулмасыны көтүрәк. Вурма әмәли үчүн бир чох васитәләр вардыр. Бунлардан анчаг үчүнү көстәрәк.

1. *Ҹәдвәл васитәсилә вурма.* Хүсуси ҹәдвәлләр һазырланыр. Бу ҹәдвәлләр ади вурма ҹәдвәлинин инкишафыдыр. Бу ҹәдвәлләрдә лазым олан чох әдәдләрин вурулмасы көстәрилмишдир (ҹәдвәлә бах). Бу ҹәдвәлләр китаб шәклиндәдир вә 1—1000, 1—10.000 вә и. а. әдәдләри әһатә эдир.


Шәкил 17

2. *Логарифма методу илә вурма.* Ҹәбрдән мә'лумдур ки, гайдалары эйни олан ифадәләр вурулдугда о ифадәләрин үстләри топланыр: (1)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Беләликлә бурада көрүрүк ки, вурма әмәли топлама

әмәлинә кәтирилир. (1) дүстурунун сол тәрәфиндә вурма, сағ тәрәфиндә исә топлама әмәли вар. Бу ганун чох әһәмиййәтлидир. Чүнки бу ганунa көрә вурма әмәли ондан даһа асан олан топлама әмәлинә кәтирилир.

Бурадан белә бир нәтиҹәйә кәлмәк олур: ики әдәди вурмаг үчүн онлары эйни гайдалы гүввәт кими язмаг вә сонра исә онларын үстләрини топламаг лазымдыр. Айдындыр ки, һасили тапмаг үчүн мүәййән үст вә гайдая көрә әдәди тә'йин этмәлийик.

1	2	3	...	99	100
2	4	6	...	198	200
3	6	9	...	297	300
...	...	...	...	...	...
99	198	297	...	9801	9900
100	200	300	...	9900	10.000

Тәҹрүбәдә буну белә һәлл этмишләр. Әввәлҹә хүсуси ҹәдвәлләр һазырланмышдыр. Бу ҹәдвәлләрдә һәр бир әдәдин мүәййән гайдая көрә, мәсәлән, 10 гайдасына көрә үсту тә'йин эдилмишдир. Бу үстә әдәдин логарифмасы дейилир вә белә язылыр:

$$\log_{10} a = b,$$

йә'ни a әдәдинин 10 гайдасына көрә логарифмасы b дир, йә'ни

$$a = 10^b.$$

Тәртиб олунан ҹәдвәлләрә исә логарифма ҹәдвәли дейилир (ҹәдвәлә бах).

Логарифма ҹәдвәли

a	b
1	0,0000
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1,0000

Инди бир мисал һәлл эдәк. 2 илә 3 әдәдләрин һасилини тә'йин эдәк.

Ҹәдвәлдән:

$$\log_{10} 2 \cong 0{,}3010,$$
$$\log_{10} 3 \cong 0{,}4771.$$

Демәк

$$\log_{10} 2\cdot 3 \cong 0{,}7781.$$

Ҹәдвәлдән исә логарифманын тәгриби гиймәтини нәзәрә алсаг

$$2\cdot 3 = 6$$

олар.

Логарифма ҹәдвәлини биринҹи дәфә тәртиб эдән Шотландия алими Ҹон Непер (1550—1617) вә онун яхын досту Һенри Бриге (1556—1630) олмушдур.

Һазырда чохлу һесабламалар апаран һәр алимин, мүһәндисин вә башга ишчиләрин әлиндә логарифма ҹәдвәлләри бөйүк васитәдир. Истәнилән саһәдә ишләйән мүһәндисин вә техникин, штурманын, топчунун, хүсусән астрономун бу ҹәдвәлә бөйүк эһтияҹы вардыр. Франса алими Лаплас демишдир ки, „логарифмаларын кәшфи астрономун ишини азалтмагла, онун өмрүнү узатмышдыр".

Гейд этмәк лазымдыр ки, мүасир логарифма ҹәдвәлләри даһа дәгигдир. Бунун васитәсилә чохәдәдли һесабламалар апарылыр. Бу һагда орта мәктәбин 9-ҹу синфиндә кениш мә'лумат верилир. Һәр бир әдәдин мүәййән гайдая көрә үстүнү тапмаг, йә'ни о әдәдин логарифмасыны тапмаг али риязиййатын мүәййән гайдаларынын көмәйи илә әлдә эдилир. Бу һагда али мәктәбләрдә мә'лумат верилир*.

Биз бурада инди тарихи әһәмиййәти олан, лакин чох асан баша дүшүлә билән бир метод һаггында гыса мә'лумат верәк.

Һолландия алими мүһәндис Симон Стевин (1548—1620) $(1+r)^n$ әдәдләринин мүхтәлиф r вә n-ин гиймәтиндә ҹәдвәлини вермишдир. Бу әдәдләр ҹәдвәли мүрәккәб фаизләрин һесабланмасы үчүн ишләнилирди. Сонралар Кеплерин көмәкчиси олан Исвечли Иоста Бюрги (1552—1632) бу ҹәдвәлләри һесабламалар ишиндә ишләтмишдир. О, Стевин кими $r = 0{,}01$ гәбул эдиб $(1+r)^n$ әдәдләри ҹәдвәлини гурмушдур:

$$1{,}01 = 1{,}01,$$
$$1{,}01^2 = 1{,}01 + 0{,}0101 = 1{,}0201,$$
$$1{,}01^3 = 1{,}0201 + 0{,}010201 = 1{,}030301$$

вә и. а.

Бу ҹәдвәли гурмаг чәтин дейилдир. Бурада һәр дәфә әдәдин үзәринә онун йүздә бирини әлавә этмәк лазымдыр.

Бу ҹәдвәлин гурулмасында ики чәтинлик вардыр: 1) n артдыгҹа рәгәмләрин сайы да артыр; 2) бурада анҹаг там дәрәҹәләр вар (n там гиймәт алыр).

Биринҹи чәтинлийи арадан галдырмаг үчүн әдәдләри юварлайырлар, йә'ни онлара яхын лакин мүнасиб әдәдләр

* 8-ҹи параграфдакы (6) формулая бахын.

көтүрүрләр. Икинчи чәтинлийи ортадан галдырмаг үчүн верилмиш әдәди чәдвәлдә олан яхын әдәдлә әвәз эдирләр. Мисал үчүн:

$$5{,}19 \cdot 1{,}87.$$

һасилинә бахаг. Бу әдәдләр чәдвәлдә йохдур. Одур ки, бунлара яхын олан әдәдләр көтүрүлүр: биринчи әвәзинә 5,165, икинчи әвәзинә исә 1,872. Бу һалда

$$5{,}165 \cdot 1{,}872 = \\ = 1{,}01^{165} \cdot 1{,}01^{63} = 1{,}01^{228}$$

алыныр. Чәдвәлдән $1{,}01^{228}$-ин гиймәтинин 9,668 олдуғу тә'йин эдилир. Демәк

$$5{,}19 \cdot 1{,}87 \cong 9{,}668$$

олур.

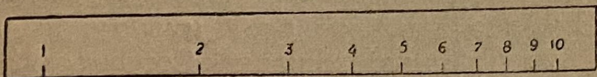
Гейд этмәк лазымдыр ки, логарифма методу башга әмәлләрдә дә ишләнә билир. Доғрудан да, чәбрдән мә'лумдур ки,

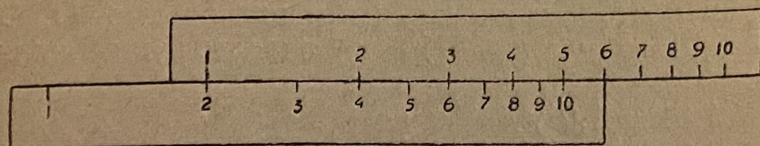
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

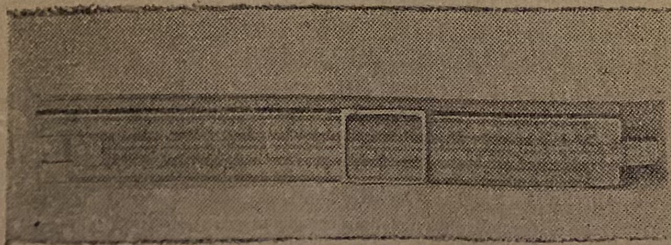
Демәк *бөлмә* әмәли *чыхма* әмәлинә, *гүввәтә йүксәлтмә* әмәли исә *вурма* әмәлинә кәтирилир.

Юхарыда көстәрдийимиз логарифма методуну чәдвәлләр әвәзинә мүәййән линейкалар васитәсилә дә ишләтмәк олар. Бир линейка үзрә әдәдин логарифмасыны гейд эдиб үзәринә әдәди язаг. Нәтичәдә шәкилдә көстәрилән кими бир гейри бәрабәр шкала алыныр. Бу кими шкаланын икиси олса әдәдин һасилини тапмаг олар. Мәсәлән $2 \times 3 = 6$ һасилини шәкилдәки кими тапмаг олар.





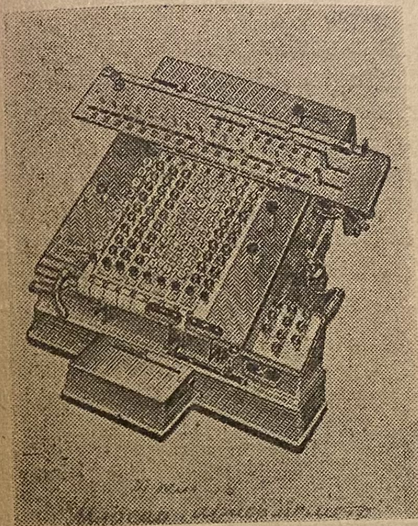
Шәкил 18



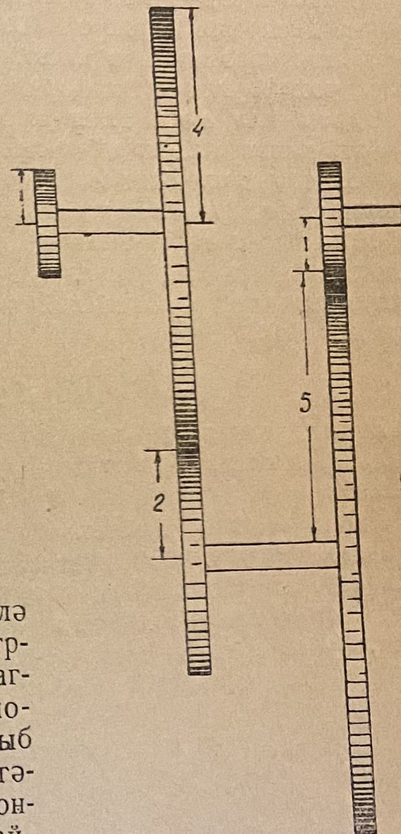
Шәкил 19

3. *Һесаблама машынлары.* Ики әдәдин вурулмасыны арифмометр васитәсилә дә ичра этмәк олар.

Арифмометрин принсипи бундан ибарәтдир: Мүәййән дишли чархлар мүәййән васитәләрлә бағлыдырлар. Биринчи чарх бир там фырландыгда икинчиси онда бир фырланыр, икинчи чарх бир там фырландыгда үчүнчүсү онда бир фырланыр вә и. а. (21-чи шәклә бахын). Бир әдәди арифмометрдә йығмаг үчүн уйғун бармаглары дүзәлдирләр вә арифмометри бир дәфә фырладыб чархларда уйғун рәгәмләр гәдәр фырланыш ярадырлар. Сонра икинчи әдәди һәмин гайда үзрә йығдыгда бу әдәдләр топланыр. Нәтичә исә чархларын шкаласында көстәрилир. Вурма әмәлинә дә гыса топлама әмәли кими бахсаг, йәни бир әдәд икинчи әдәдә вурулдугда биринчи икинчиси гәдәр өз-өзүйлә топланмасыны дүшүнсәк, дедийимиз кими тәртиб олунан машын вурманы да эдәчәкдир.



Шәкил 20



Шәкил 21

Һазырда чох мүкәммәл арифмометрләр һазырланмышдыр. Бунларда фырланма артыг әл илә дейил, электрик мотору васитәсилә эдилир.

Инди чох сүр'әтли вә бир чох әмәлләри бир вахтда эдә билән машынлар һазырланараг ишләдилир. Бу риязи машын-

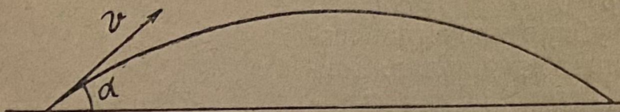
ларын гурулуш принсипләри вә онларын этдикләри һесабламаларын тәсвири бизим бу китабчанын планындан харичә чыхыр.

Бир сыра мүасир машынларын үмуми принсипи һаггында мүәййән мә'лумат верәк. Мә'лумдур ки, бир-биринә һеч дә бәнзәмәйән һадисәләр кәмиййәтчә эйни риязи ганунлара табедирләр. Одур ки, бу һадисәләрдән бирисини мүшаһидә этсәк, дикәрини дә өйрәнмиш оларыг. Мәсәлән шәбәкәдәки электрик чәрәяны илә мәсаматлы мүһитдәки нефтин сүзүлмәси чох фәргли һадисәләрдир. Лакин шәбәкәдәки чәрәянын шиддәти илә мәсаматлы мүһитдәки нефтин сүзүлмәсинин сүр'әти риязи олараг эйни гануна табедирләр. Бурада мәсәлән электрик чәрәяны маенин сүзүлмәси сүр'әтилә эйни риязи гануна табедирләр. Одур ки, электрик һадисәләрини мүшаһидә этмәк асан олдуғундан нефтин сүзүлмәсини дә электрик һадисәләри илә өйрәнирләр. Бу мәгсәдлә гурулан электрик системинә электромодел дейилир. Метода исә электроаналокия дейилир.

11. АНАЛИТИК ҺӘНДӘСӘ

Эвклид һәндәсәсинин методлары ени һәндәси образлары, хәтләри, сәтһләри, һәчмләри өйрәнмәкдә чәтинликләрә раст кәлир.

Кеплерә көрә планеталар эллипс хәтти үзрә һәрәкәт эдирләр. Галилей исә бучаг алтында атылан чисмин (мәрми) бошлугда парабола хәтти үзрә һәрәкәт этдийини көстәрмишдир (22-чи шәклә бах). Мүхтәлиф физики ганунларын өйрәнилмәси, бу вә я дикәр мүрәккәб һәндәси образларын өйрәнилмәсинә кәтирилир.



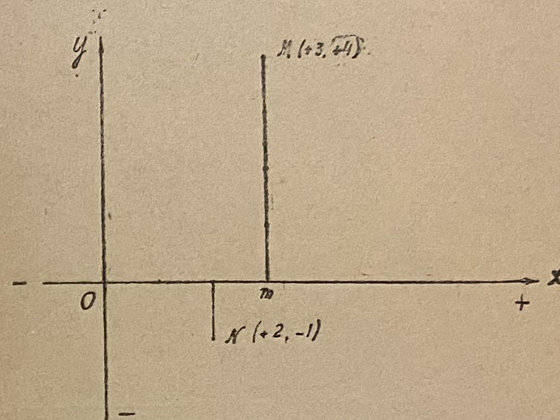
Шәкил 22

Бу кими мәсәләләр ени методларын, ени һәндәсәнин яранмасыны тәләб эдирди. Бу тәләбат XVII әсрдә Авропада капитализмин яранмасы дөврүнә дүшүр.

Эллипс, парабола кими һәндәси образлар 2000 ил эрамыздан әввәл юнан риязийятчыларына мә'лум иди. Лакин орта әсрләрдә тәләбат олмадығындан бунлар тамамилә унудулмуш иди.

XVII әсрин биринчи ярысында тамамилә ени һәндәсә яранды. Бу һәндәсә әсас э'тибарилә франсыз алими Декартын тәдгигаты нәтичәсиндә ярадылмышдыр. О, һәндәси образларын даһа үмуми хассәси олан *вәзиййәти* әдәдләр васитәсилә өйрәнмәйи тәклиф эдирди. Айдындыр ки, әдәдләр васитәсилә һәндәси образларын элементләринин вәзиййәти мә'лум олса, онларын башга хассәләрини, мәсәлән, метрик хассәләрини (өлчүләрини) тә'йин этмәк олар.

Декарт бу фикри белә еринә етирмишдир. О, мәсәлән, бир мүстәви үзәриндәки һәндәси образлары өйрәнмәк үчүн ики бир-биринә перпендикуляр ох көтүрүр (23-чү шәклә бах). Бу мүстәви үзәриндәки нөгтәнин вәзиййәти мүәййән машстаба көрә *от* вә *тм* парчаларынын узунлугларыны тә'йин эдән әдәдләрлә тә'йин эдилир.



Шәкил 23

Бу әдәдләрә M нөгтәсинин координатлары дейилир. Шәкилдән айдындыр ки, M нөгтәсинин координатлары (+3,+4), N нөгтәсинин координатлары исә (+2,-1) дир.

Демәк, *мүстәви үзәриндәки һәр нөгтәйә гаршы еканә ики әдәд* (әдәдләр чүтү) *вә әксинә, һәр әдәдләр чүтүнә гаршы еканә нөгтә вардыр.*

Әкәр мүстәви үзәриндә нөгтәләр чохлуғу яхуд хәтт олса онлара гаршы чүтләр чохлуғу дурур. Бу чүтләри мүәййән ганун үзрә тәнлик васитәсилә версәк, дейә биләрик ки, һәр нөгтәләр чохлуғуна яхуд хәттә гаршы тәнлик вардыр.

Мәсәлән, мүстәви үзәриндә чеврәни көтүрәк. Чеврә элә нөгтәләрин һәндәси еридир ки, онлар мәркәздән (M-дән) эйни мәсафәдә (R мәсафәсиндә) дурурлар (24-чү шәкил). M мәркәзинин координатларыны (a, b), чеврәнин ихтияры нөгтәсинин координатлары (x, y) илә ишарә этсәк, шәкилдән M N P дүзбучаглы үчбучағындан

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

алыныр.* Демәк, чеврәйә гаршы (1) тәнлийи гоюлур.

* Бурада дүзбучаглы үчбучағын мүәййән хассәси истифадә олунмушдур: дүзбучаглы үчбучағын катетләринин квадратлары чәми онун һипотенузасынын квадратына бәрабәрдир.

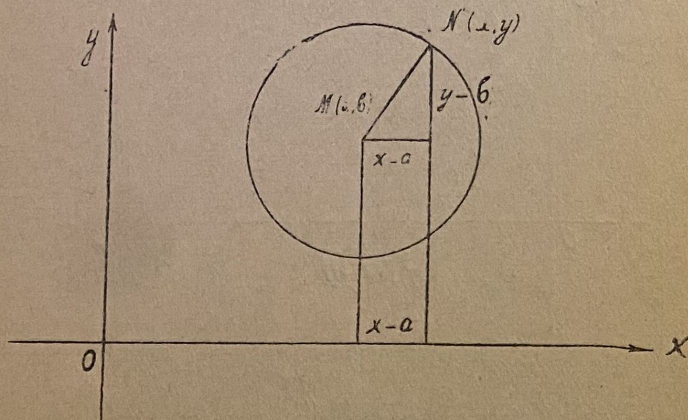
Һәндәси образларла чәбри образлар арасындакы бу гаршылыглыг *һәндәси образлар һаггындакы проблемләри чәбрин проблемләринә кәтирир.*

Декартын яратдығы бу һәндәсәйә *аналитик һәндәсә* дейилир.

Аналитик һәндәсә риязиййатын бөйүк наилиййәтләриндән бирисидир. Бунун яранмасы илә мүрәккәб һәндәси образларын өйрәнилмәси иши асанлашыр.

Мәсәлә.

$$x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{1}{4} = 0 \qquad (2)$$



Шәкил 24

тәнлийи һансы һәндәси образы тә'йин эдир.

Бу суала чаваб вермәк үчүн о тәнлийи (1) шәклинә кәтирәк:

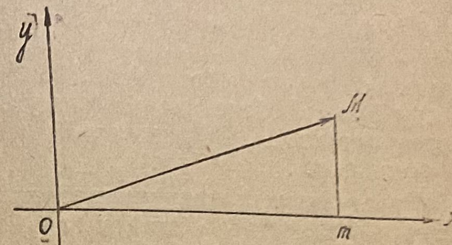
$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Демәк (2) тәнлик, мәркәзи $M\left(+1, +\frac{1}{2}\right)$ нөгтәсиндә олан вә радиусу $\sqrt{\frac{3}{2}}$ олан чеврәни верир.

Мүстәвидә нөгтәнин вәзиййәтини 25-чи шәкилдәки кими векторла да көстәрмәк олар. Одур ки, әдәдләр чүтү әвәзинә бир векторун көтүрүлмәси, методу даһа да садәләшдирир.

Риязиййатын векторлары өйрәнән һиссәсинә *векторлар һесабы* дейилир.

Биз һәмишә һәндәси образлары мүстәви үзәриндә тәдгиг эдирдик. Бу дедикләримиз үч өлчүлү фәзайә дә көчүрүлә билир.



Шәкил 25

12. ЕНИ ҺӘНДӘСӘЛӘР

Мәктәбдә өйрәнилән һәндәсә Эвклидин һәндәсәси адланыр. Бу һәндәсә бизим эрадан әввәл ярадылмышдыр.

Эвклид һәндәсәсиндә бир сыра әввәлдән гәбул олунмуш тәклифләр (постулатлар вә аксиомалар) вардыр.

Бу тәклифләр ичәрисиндәки V постулатын ифадәси беләдир: *бир мүстәви үзәриндә верилмиш дүз хәтт үзәриндә олмаян нөгтәдән о дүз хәттә параллел олан анчаг бир дүз хәтт кечирмәк олар.*

Шәкил 26

Ядыныза салаг ки, бир мүстәви үзәриндә ики дүз хәтт кәсишмәзсә онлара параллел дүз хәтләр дейилир (шәкил 26).

Бу постулат узун мүддәт алимләри дүшүндүрмүшдүр. Бурадакы чәтинлик дүз хәтләрин һәр ики тәрәфә сонсуз узадылмасыдыр.

V постулатын чәтин олмасына көрә ону һәндәсәдән чыхартмаг, яхуд ону башга чүр ифадә этмәк, даһа садәси, ону бир теорема кими исбат этмәк тәшәббүсүндә оланлар чох олмушлар.

Бу мәсәлә илә юнан Прокл (V әср, бизим эрадан габаг) азәрбайчан алими Мүһәммәд Нәсирәддин Туси (XIII әср), инкилис Валлис (1616—1703), италян Саккери (1667—1733), франсыз Лежандр (1752—1833), алман Ламберт (1728—1771),

вә башгалары мәшғул олмушлар. Лакин бунларын тәшәббүсләри нәтичәсиз галмышдыр.

Параллелләр һаггындакы бу проблем XIX әсрин әввәлләринә гәдәр ачыг галмышдыр. Бу проблем XIX әсрин әввәлләриндә ән вачиб мәсәләләрдән бири сайылырды. Бу проблем һаггында Гаусс, Лагранж, Даламбер, Лежандр кими нәһәнк алимләр дүшүнүрдүләр.

Бу проблеми биринчи дәфә һәлл едән Казан университетинин профессору Н. И. Лобачевски олмушдур. О, бу һагда чыхартдығы элми нәтичәләри 1826-чы илдә Казан университетиндә мә'рузә етмишдир.

Лобачевски *V* постулатын һөкмүнүн тәрсини фәрз едәрәк дүз хәттин харичиндәки нөгтәдән бир йох, ән азы ики паралел дүз хәтт кечирмәк олар дейә гәбул етмишдир.

Лобачевски Эвклидин галан тәклифләри илә бу ени постулаты бирликдә көтүрүб һәндәсәни инкишаф етдирир вә һеч бир зиддиййәтә раст кәлмир. О, ашағыдакы нәтичәләри алыр:

I. *V* постулат Эвклидин галан тәклифләринә әсасланараг исбат олуна билмәз.

2. Эвклидин *V* постулатынын әксини фәрз етдикдә дә һеч бир зиддиййәт алынмыр вә ени һәндәсә гурулур.

Беләликлә Лобачевски риязиййата сон дәрәчә мүһүм олан енилик дахил едир: *мәнтиги олараг еканә бир һәндәсә дейил, чох һәндәсәләр вардыр.*

Бурада белә бир суал чыхыр: бәлкә ени һадисәләрин тәчрүби әһәмиййәти йохдур.

Лобачевски өзү инанырды ки, ени һәндәсәләр ени механика, ени физика илә әлагәдардыр.

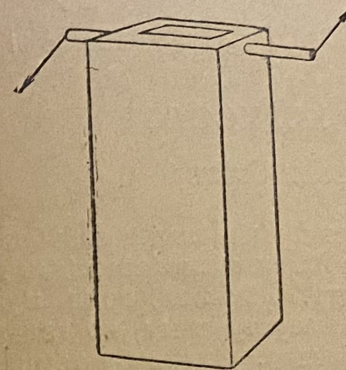
Лобачевскинин бу даһиянә фикри анчаг XX әсрин әввәлләриндә еринә етирилди: Эйнштейнин яратдығы нисбилик нәзәриййәсиндә ишләнән һәндәсә ени һәндәсә олду.

Лобачевскинин бу кәшфи элмдә материалистик ингилаб яратды. Мин илләрлә еканә фәрз олунан Эвклид һәндәсәси артыг еканәлийиндән чыхды. Ени һәндәсәләрин бә'зи фактлары көһнә һәндәсәнин фактларындан фәргләнир. Мәсәлән елә һәндәсә вар ки, үчбучағын дахили бучаглары чәми 180 дәрәчәдән чох, eләси дә вар ки, һәмин чәм 180 дәрәчәдән аздыр. Һалбуки Эвклид һәндәсәсиндә һәмин чәм дәгиг 180 дәрәчәдир.

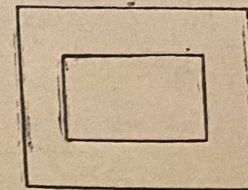
Лобачевскидән сонра ени һәндәсәләр яратмаг вә ону элмин мүхтәлиф саһәләриндә ишләтмәк иши кениш инкишаф едир вә инди дә етмәкдәдир.

3. ЧЕВИРМӘЛӘР МЕТОДУ

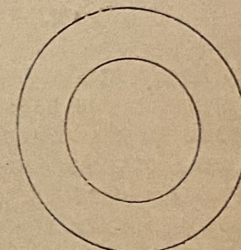
Риязиййатда чох ишләнән методлардан бириси дә чевирмәләр методудур. Бу методун әсас идеясы ашағыдакындан ибарәтдир. Фәрз едәк ки, мүстәви резиндәндир. Әкәр мүстәви үзәриндәки образлар мүрәккәб олсалар биз резини мүәййән ганунла дартараг яхуд сыхараг онлары чевириб садә образлара кәтиририк. Әкәр мүәййән бир мәсәлә садә образ



Шәкил 27



Шәкил 28



Шәкил 29

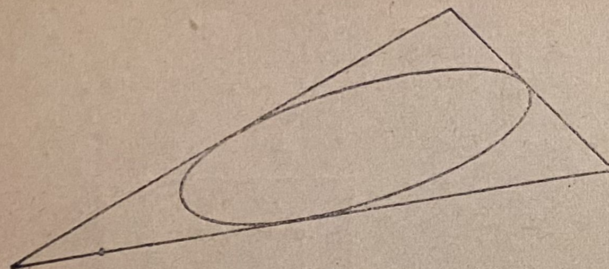
үчүн һәлл олунубса о, кери гайыдараг, мүрәккәб образ үчүн дә һәлл олуна биләр. Мисал үчүн белә бир мәсәләйә бахаг. Фәрз едәк ки, ән кәсийи 27-чи шәкилдәки кими дүзбучаглы һалгадан ибарәт олан борунун бурулмасыны өйрәнмәк истәйирик. Йә'ни верилән гүввәтә көрә бурулманын бөйүклүйүнү тә'йин етмәк лазымдыр.

Әкәр бу мәсәлә даирәви һалга үчүн һәлл олунубса, биз юхарыдакы методу ишләдә биләрик: мүстәвини резиндән фәрз едиб ону елә дәйишдирәрик ки, дүзбучаглы һалга (шәкил 28), даирәви һалгая кәтирилсин (шәкил 29). Сонра бурулманын кәсийи даирәви һалга олан бору үчүн өйрәниб верилмиш боруя гайытмалыдыр.

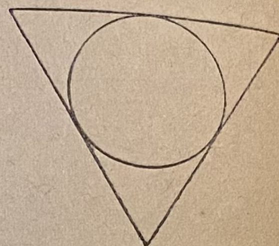
Бу фикри изаһ етмәк үчүн даһа бир мисал көтүрәк.

Мәсәлә. *Верилмиш еллипсин харичинә саһәси ән аз олан үчбучаг* (шәкил 30) *чызмаг лазымдыр.* Бу мәсәләни даирә үчүн һәлл етмәк олар. Бу үчбучаг бәрабәр тәрәфли олмалыдыр (шәкил 31). Инди биз мүстәвини еллипсин бөйүк оху истигамәтиндә сыхмагла, яхуд кичик оху истигамәтиндә дартмагла мәсәләни даирәйә кәтирмәк олур. Бурдан анлашылыр ки, ахтарылан үчбучагләр сайсыз чохдур.

Чевирмәләр методу мүасир риязийятын ән гүввәли методларындандыр.



Шәкил 30



Шәкил 31

14. ТӘСАДҮФИҺАДИСӘЛӘР

ЭҺТИМАЛ НӘЗӘРИЙЙӘСИ

Элә һадисәләр вардыр ки, онлары ярадан сәбәбләр чох олдуғундан һәмин һадисәләрин йҝинлийини әввәлдән демәк чох чәтин вә я мүмкүн дейилдир. Мәсәлән, ерин мүәййән нөгтәсиндә, мүәййән заманда температуранын нә гәдәр олачағы суалына чаваб вермәк чәтиндир. Чүнки бу температураны төрәдән сәбәбләр чохдур вә мүрәккәбдир.

Икинчи бир мисал көтүрәк. Бир чисмин узунлуғуну өлчмәк лазымдыр. О узунлуг эйни васитәләрлә эйни шәраитдә белә өлчүлсә енә дә нәтичәләр мүхтәлиф олар. Чүнки һәр өлчүдә мүәййән харичи сәбәбләр вардыр (мүшаһидәчи вә и. а.).

Үчүнчү бир мисал даһа көтүрәк. Мә'лумдур ки, маенин ичәрисиндә чох кичик олан һиссәчикләр асылы шәкилдә һәрәкәт эдирләр. Һиссәчикләрин һәрәкәт этмәсинин сәбәби онлара тә'сир эдән маеин молекулаларыдыр. Бу молекулалар лап чохдур вә онлар гармагарышыг һәрәкәт эдирләр. Бу һәрәкәтин нәтичәсиндә молекулалар мүхтәлиф шәкилдә һиссәчикләрә тохунур вә бу заман онлары һәрәкәтә кәтирир. Молекулаларын өзләрини вә һәрәкәтини микроскоп васитәсилә көрмәк олмур. Чүнки молекулалар чох кичик олдуғундан микроскопун бөйүтмә күчү чатмыр. Лакин маеә харичдән атылмыш һиссәчикләри микроскопла мүшаһидә этмәк олар. Бу һадисәйә Броун һәрәкәти дейилир.

Айдындыр ки, микроскоп алтында бир бахышла нечә һиссәчийин көрүнәчәйини әввәлдән демәк олмаз. Исвеч физики Сведеберг гызылын кичик һиссәчикләрини 518 дәфә суда мүшаһидә этмишдир. Нәтичәдә тапмышдыр ки, 112 мүшаһидәдә һеч бир һиссәчик көрүлмәмишдир;

I һиссәчик 168 дәфә, 2 һиссәчик 130 дәфә, 3 һиссәчик 69 дәфә, 4 һиссәчик 12 дәфә, 5 һиссәчик 5 дәфә, 6 һиссәчик I дәфә, 7 һиссәчик I дәфә мүшаһидә олунмушдур.

Инди биз мүшаһидә олунан һиссәчикләрин нисби сайыны тапаг:

0	һиссәчик:	$\frac{112}{518} \cong 0{,}216$
1	„	$\frac{168}{518} \cong 0{,}325,$
2	„	$\frac{130}{518} \cong 0{,}251,$
3	„	$\frac{69}{518} \cong 0{,}133,$
4	„	$\frac{32}{518} \cong 0{,}062,$
5	„	$\frac{5}{518} \cong 0{,}010,$
6	„	$\frac{1}{518} \cong 0{,}002,$
7	„	$\frac{1}{518} \cong 0{,}002$

Әкәр биз тәчрүбәни 518 дәфә дейил, бир аз да чох апарсаг бу кәсирләрин сурәтләри вә мәхрәчләри дәйишмиш олур, лакин нисбәтләр демәк олар ки, дәйишмәмиш галыр.

Демәк тәсадүфи һадисәләрдә дә өзүнә мәхсус мүәййән ганунийййәт вардыр: тәчрүбәләрин сайыны артырсаг һәр тәсадүфи һадисәнин әмәлә кәлмәси мигдарынын үмуми тәчрүбәләр сайына олан нисбәти демәк олар ки, сабитдир. Бу сабит нисбәтә *эһтимал* дейилир.

Демәк һиссәчикләрин мүшаһидә олунмамасынын эһтималы 0,216, бир дәнә һиссәчийин мүшаһидә олунмасы эһтималы 0,325 вә и. а., нәһайәт 7 һиссәчийин мүшаһидә олунмасы эһтималы 0,002—дир.

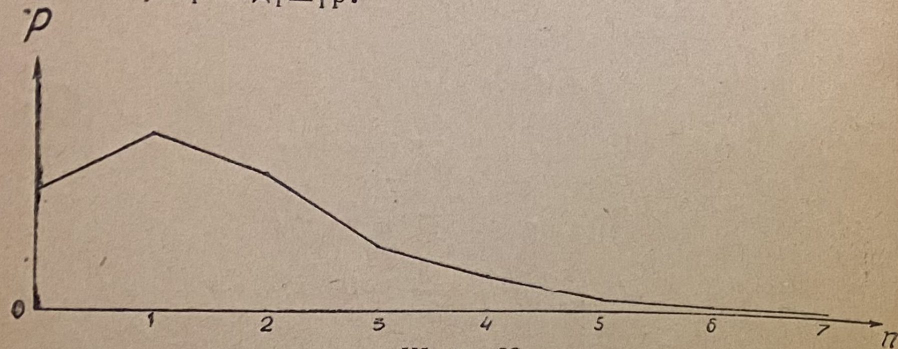
Бу белә дүшүнүлмәлидир: әкәр мүшаһидә чох апарыларса онун тәгрибән 0,216 һиссәсиндә һиссәчикләр көрүлмәйәчәкдир, 0,325 һиссәсиндә I һиссәчик көрүләчәк вә и. а.

Бурадан көрүрүк ки, тәсадүфи һадисәләрдә дә мүәййән ганунийййәт вардыр. Һәр тәсадүфи һадисәнин әмәлә кәлмәсинин мүәййән эһтималы вардыр.

Тәсадүфи һадисәләрин эһтималларыны өйрәнән элмә *эһтимал нәзәрийййәси* дейилир.

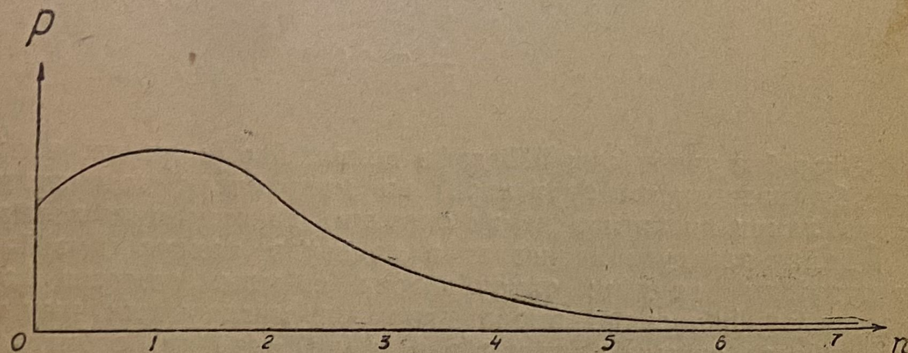
тәсадүфи һадисәләр һәм тәчрүби, һәм дә нәзәри өйрә-нилир.

Юхарыда данышдығымыз кичик һиссәчикләрин маедә пайланмасы һаггындакы мәсәләни нәзәри олараг өйрәнән XX әсрин бөйүк алими Эйнштейн олмушдур. Онун алдығы нәзәри нәтичәләрлә Сведеберин тәчрүби нәтичәләри бир-биринин үстүнә дүшүр.



Шәкил 32

Тәчрүби вә нәзәри хәтләр 32 вә 33-чү шәкилләрдә көстә-рилмишдир.



Шәкил 33

Еһтимал мәсәләси илк дәфә гумар оюнлары илә әлагә-дар олараг мейдана чыхмышдыр. Белә мәсәләләри биринчи дәфә олараг XVII әсрдә элми сурәтдә өйрәнмәйә башла-мышлар. Исвечрә алими Яков Бернулли (1654—1705) бу саһәдә бир чох мәсәләләр һәлл этмишдир. О, бу мәсәләләрин һәллиндә сонсуз кичиләнләр анализинин методларыны ишләт-мишдир.

Еһтимал нәзәрийййәси элмини мүхтәлиф саһәләрдә ишлә-дән бөйүк алман алими Гаусс (1777—1855) олмушдур.

Сонралары еһтимал нәзәрийййәси бөйүк рус алимләри П. Л. Чебышев (1821—1894), А. А. Марков (1856—1922) тәрәфиндән инкишаф этдирилмишдир.

Еһтимал нәзәрийййәсини дәгиг элм шәклинә салан, элмин вә техниканын мүхтәлиф саһәләриндә тәтбиг эдән Совет алимләри олмушдур. Бу саһәдә акад. А. Н. Колмогоровун, акад. С. Н. Бернштейнин элми ишләрини хүсуси гейд этмәк олар.

15. РИЯЗИЙЯТЫН ХАРАКТЕРИК ЧӘҺӘТЛӘРИ ВӘ МАҺИЙЙӘТИ

Һәр бир элм һаггында мүәййән тәсәввүр яратмаг үчүн онун айры-айры һиссәләрини билмәкдән башга, о элмә үмуми нәзәр етириб, онун маһиййәтини вә характерик чә-һәтләрини өйрәнмәк лазымдыр.

Риязийят инсанын тәчрүби фәалиййәтиндән доғур, ондан мүвәггәти айрылыб, мүчәррәд инкишаф эдир, енә дә тәтбиг олунмаг үчүн кери, инсан тәчрүбәсинә гайыдыр, бу нөв инкишаф эдир вә инсанын мәдәнийййәтини вә тәбиәтин гүввә-ләрини даһа файдалы истифадә этмәк ишини инкишаф этдирир.

Риязийятын характерик чәһәтләри бунлардыр: илк әввәл мүчәррәдлик, икинчи дәгиглик, мәнтиги чиддилик, метод-ларынын үмумилийи вә нәһайәт, тәтбиг олунмасынын сон дәрәчә кениш олмасы.

Мүчәррәдлик садәчә сай просесиндә белә әмәлә кәлир. Биз мүчәррәд әдәдләри конкрет чисимләрлә бағламырыг, ялныз өйрәнирик.

Еләчә дә һәндәсәдә биз, мәсәлән, дүз хәтдән данышан-да, артыг она дартылмыш сап кими бахмырыг, биз мүчәр-рәд олараг дейирик дүз хәтт ялныз бир өлчүсү олан һән-дәси образдыр.

Белә мүчәррәдлик риязийятын һәр һиссәсиндә вардыр. Әдәд вә һәндәси фигуралар биринчи анлайышлардыр. Сон-ралар исә функсиялар, ени фәзалар, чох өлчүлү фәзалар вә и. а. кими башга мүчәррәд анлайышлар алыныр.

Дикәр тәрәфдән дә риязийят анчаг мүчәррәд анлайыш-ларын йығымы дейилдир. Риязийят анлайышлары доғулдуғу конкрет аләмлә бағлыдыр.

Риязийятын нәинки анлайышлары, методлары да мүчәр-рәддир. О, исбат этдикләрини дә мүчәррәд, тәфәккүрлә, һесабламаларла ичра эдир.

Риязийят мүтләг дейилдир. Риязийят да башга элмләр кими инкишаф эдир.

Тәбиәт вә чәмиййәтдәки һадисәләр чүрбәчүр, бир-бирин-дән фәргли вә бә'зән чох фәрглидир. Мәсәлән, электрик һадисәләри илә нефтин мәсамәтли мүһитдә сүзүлмәси башга-башга һадисәләрдир. Лакин онлар мүәййән шәраитдә эйни

риязи мәсәлә илә әлагәдардыр. Бу исә риязийятын үмумилийини көстәрир.

Нәһайәт, риязийятын кениш тәтбиг олунмасы да онун характерик чәһәтләриндәндир.

Ән әввәл биз һәр заман истеһсалатда, һәятда, ичтимаиййәтдә риязийятын анлайышларындан вә нәтичәләриндән истифадә эдирик: мүәййән саһәйә сәрф олунан пулу һесабладыгда әдәдләри, һесаб әмәлләрини, отағын саһәсини һесабладыгда һәндәсәни ишләдирик. Доғрудур, бу ишләдилән анлайышлар вә нәтичәләр чох садәдирләр, лакин бунлар риязийятын илк яраныш дөврүндә ән йүксәк наилиййәтләрдән һесаб олунурдулар.

Икинчи риязийятсыз мүасир техника мүмкүн олмазды. Тәйярәчиликдә, иншаат ишләриндә, кәми иншаатында бир сөзлә мүасир техниканын элә саһәси йохдур ки, орада риязийят сон дәрәчә лазым олмасын. Онларын һамысы мүасир риязийятын дәрин нәтичәләринә әсасланыр.

Нәһайәт, элмләрин һамысы риязийятдан истифадә эдирләр. „Дәгиг элмләр"—механика, астрономия, физика, әләчә дә кимя, риязи апаратдан истифадә эдәрәк өз нәзәриййәләрини ярадыр вә инкишаф этдирирләр. Риязийятсыз бу элмләрин прогреси, инкишафы мүмкүн дейилдир.

Риязийятын дәгиг элмләрдә вә техникадакы сон дәрәчә парлаг тәтбигләриндән бә'зи нүмунәләр кәтирәк.

Күнәш системиндәки ән узаг планета олан Нептун 1846-чы илдә риязи һесабламаларын нәтичәсиндә тапылмышдыр. О вахт ахырынчы һесаб олунан планетанын—Уранын һәрәкәтиндәки дүзкүнсүзлүйү тәһлил эдән франсыз астроному Левер'е белә бир нәтичәйә кәлди ки, бу дүзкүнсүзлүйү һәлә мә'лум олмаян башга планетанын чәзби ярадыр. Левер'е механиканын ганунларына әсасланараг һесабламалар апарыб намә'лум планетанын ерини тә'йин этди. О вахт күчлү телескоплары олан алманиядакы Галле шәһәринә Левер'енин һесабламаларла тә'йин этдийи планетанын ерини хәбәр вердиләр. Бу һесабламалара көрә телескопу истигамәтләндириб намә'лум олан планетаны тапдылар вә онун адыны Нептун гойдулар. Бу кәшф тәк механика вә астрономиянын, хүсусән Коперник системинин галибиййәти дейил иди, о, риязи һесабламаларын да галибиййәти иди.

Икинчи бир мисал кәтүрәк. Инкилис физики Максвелл электромагнит һадисәләрини мүәййән диференсиал тәнликләрлә ифадә этди. Максвелл бу тәнликлерә әсасланараг апардығы сырф риязи тәдгигат нәтичәсиндә электромагнит далғаларынын варлығы вә онларын ишыг сүр'әтилә һәрәкәт этмәләри һагда өз фикрини сөйләди. Бу нәтичәйә әсасланараг бир аз сонра алман алими Һерс тәчрүби олараг бу далғалары тапды. Бөйүк рус алими А. С. Попов бу далғалардан истифадә эдәрәк индики радио-техниканын әсасыны гойду.

Бурада көрүрүк ки, илк дәфә электрик чәрәяны тәрәфиндән магнит ибрәсинин тәрпәнмәсиндән башлараг элм һадисәнин нәзәриййәсинә кечир, о һадисәнин риязи тәдгигини апарыр вә бурадан доған ени нәтичәләр тәчрүбәйә гайыдыр, радио-техниканы ярадыр, радио-техника исә ени мәсәләләр, о чүмләдән дә сырф риязи һәлл олуна билән проблемләр ортальға чыхарыр, нәзәриййәни бир даһа инкишаф этдирир.

Бу кими мисаллар чох кәтирмәк олар. Биз юхарыдакы мисалларла кифайәтләнирик.

Риязийят да башга элмләр кими сосялист вәтәнимиздә апарылан коммунизм гуручулуғу ишләрилә әлагәдар олараг тарихдә мисли көрүлмәмиш дәрәчәдә инкишаф эдир. Чох мигдарда һазырланмыш совет риязийятчылары ордусу Совет элминин вә техникасынын инкишафы үчүн бөйүк наилиййәтләр әлдә этмишләр вә кәләчәкдә даһа да чох эдәчәкләр.

Совет Азәрбайчанында да риязийят элмләри саһәсиндә бир чох мүвәффәгиййәтләр вардыр. Бу мүвәффәгиййәтләр хүсусән диференсиал вә интеграл тәнликләри, функсиялар нәзәриййәси вә ени һәндәсәләр саһәсиндәдир. Риязи элмләр саһәсиндә элми тәдгигат ишләри Азәрбайчан ССР Элмләр Академиясынын физика вә риязийят институтунда вә Али мәктәбләрин риязи кафедраларында апарылыр. Риязийят элмләри республикамызда күндән-күнә чичәкләнир вә кәнч риязийятчыларын сыралары мөһкәмләнир.

КИТАБЫН ИЧИНДӘКИЛӘР

Редактору Һ. Н. Ағаев. Рәссамы Ф. Гулиевдир.
Техн. редактору В. Гаврилова. Корректору Т. Бағырова.

Йығылмаға верилмиш 20/IX-1954-чү ил. Чапа имзаланмыш 16/III-1955-чи ил.
Форматы $60 \times 92^1/_{16}$—1,62э=3,25 чап вәрәги. (Уч. нәшр. вәрәги 3,5).
Тиражы 5000. ФГ 00225. Сифариш 346. Бакы, Фиолетов күчәси, 8.
Гиймәти 1 ман. 10 гәп.

Азәрбайчан ССР Мәдәниййәт Назирлийинин „Гызыл Шәрг" мәтбәәси.
Бакы, Һәзи Асланов күчәси, 80.